國立中科實驗高級中學 100 學年度第 1 次教師甄選
數學科試題本

測驗說明：

本試題分為兩部分：**填充題**與**證明計算題**。

填充題部分：每格 5 分，共 80 分；計算證明題部分：每題 10 分，共 20 分。

題目共四頁，請依序於題本上作答，並**清楚標明題號**，不需抄題。

數學專題能力思考及科展比賽常識題，請依說明分別完成下列各題。

一、填充題（A~P 每格 5 分，共 80 分），請在答案卷上依序標出格號並作答

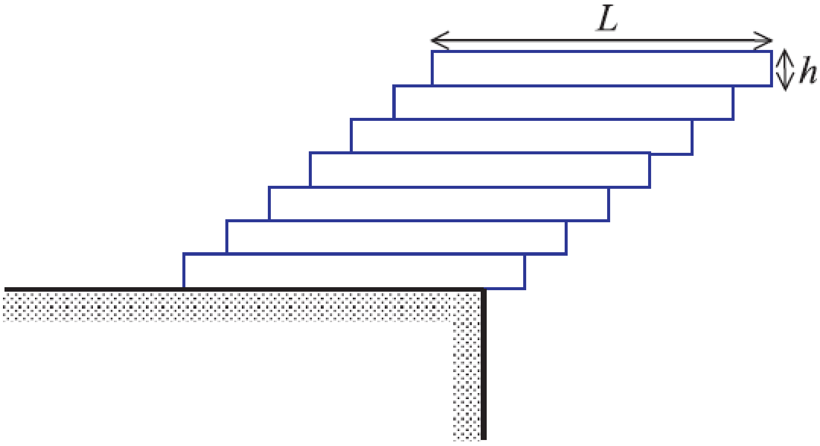
1. 阿基米德(Archimedes，公元前287年~公元前212年)，古希臘數學家、力學家，生於西西里島的敘拉古地區。是人類歷史上最偉大的科學家之一。美國科學史家E. T. 貝爾(Bell)在《數學人物》一書中寫道：「任何一張開列有史以來最偉大的三位數學家的名單上，必定寫有阿基米德的名字，另兩位通常是牛頓和高斯，不過以他們的宏偉業績和所處的時代背景相較，或拿他們影響當代和後世的深遠相比，仍應首推阿基米德。」而拋物線弓形面積的計算是阿基米德最著名的成就之一。他在《拋物線求積法》書中研究了曲線圖形求面積問題，他推出二個定理：

   定理1：阿基米德三角形底邊上的中線平行於軸，與底邊平行的中位線是一條切線，而且這條切線與底邊上的中線的交點是拋物線上的點。

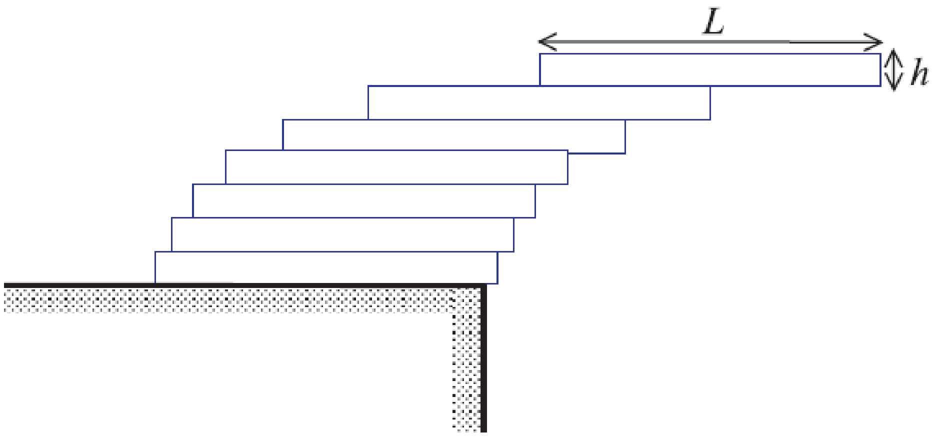
   定理2：拋物線把阿基米德三角形分成比值為2：1的兩部分，或:被拋物線所包含的面積是相應的阿基米德三角形的三分之二。

   請問：如果根據阿基米德所推論的兩個定理，求得拋物線與一直線相交圍成的面積是同底等高三角形面積的比值為____(A)____（出自數學傳播34卷2期,pp.76-81）

2. 疊書問題的基本描述為:在桌面邊緣堆疊書本，讓每本書皆凸出於下面的書本，則最上面的那本書最多可以向外延伸多長而不會坍塌?如果有N本書相疊，則最大凸出桌邊緣的量會是多少?要怎麼疊才會得到最大突出量?按一般直覺的想法(如圖一)會認為最上面那本書能凸出桌緣的部份不會超過一本書的長度，實際的情形果真是如此嗎?如果書本堆疊的方式不是呈線性差排的話(如圖二)，情況又會是如何?可不可能堆疊無限多本書，使其遠超出桌緣(如同一個通天的梯子)而不會崩垮?當書本越疊越多時，最上面的書凸出桌邊緣的距離是否有極限?如將上述問題做進一步的延伸，又該如何堆疊才會得到最大的凸出量?請應用物理學中的<u>力矩平衡定律</u>，並配合高中數學<u>級數</u>的觀念，思考在**書本大小與質量均等**的情形下書本凸出桌緣的距離?並分析書本所應堆疊的方式，進而思考出該情況下書本最大凸出量之數學關係式以及書本端點所形成軌跡的數學函數。並在給定書本總數N的情況下，且**書本大小與質量均等**，則書本若由上而下應該以____(B)____級數關係的差排方式堆疊，此時書本端點所形成的軌跡近似____(C)____函數。（出自數學傳播34卷2期,pp.3-26）



圖一: 常見的等差排堆疊方式。



圖二: 非線性差排的堆疊方式。

3. 前台灣國際科展是由什麼X單位主辦，2009年的台灣國際科展每組參展人數上限是Y人，2008年時台灣地區獎金最高的高中生科學獎的全名是Z獎，(X, Y, Z)=____(D)____

4. $\dfrac{3^4+2^6}{7^4+2^6}\times\dfrac{11^4+2^6}{15^4+2^6}\times\dfrac{19^4+2^6}{23^4+2^6}\times\dfrac{27^4+2^6}{31^4+2^6}\times\dfrac{35^4+2^6}{39^4+2^6}\times\dfrac{43^4+2^6}{47^4+2^6}=$____(E)____（化為最簡分數）

5. 空間中有三點 A(－1，1，3)、B(3，1，5)、P(4，－1，－4)，若球面 S 過 A、B 兩點且球心在平面 E：$5x-2y+5z-14=0$ 上，則滿足此條件的球面 S 有無限多個，其中半徑最小的球面方程式為____(F)____

6. 若從 1，2，⋯，13 中任選出相異三數 x、y、z，且 $x<y<z$，則 $y-x\geqq 3$ 且 $z-y\geqq 3$ 成立之機率為____(G)____

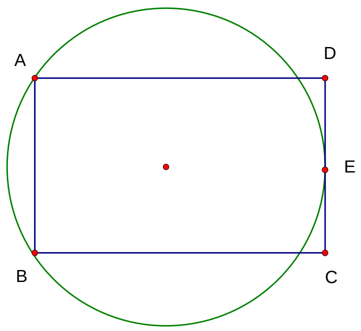
7. 一袋中有 5 個球，分別寫上 1、2、3、4、5 號，今由其中任取一球記下其號碼後放回袋中，如此繼續 n 次，若 P_n 表記錄到 n 次時數字和為偶數的機率，

則 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2}-P_n)=$____(H)____

8. 求 $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2\sqrt{nk}})=$____(I)____

9. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$ ，其中 a、b、$c\in Q$。求 $a+b+c=$____(J)____

10. 一矩 ABCD 的周長為 8，E 為 $\overline{CD}$ 的中點，一圓 C 過 A、B 兩點與 $\overline{CD}$ 相切於 E(如下圖所示)，求圓 C 半徑的最小值為____(K)____



11. P 為球面 S：$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=4$ 上的動點，A(3, 4, 0)、B(3, 3, 2)為球面外兩點，求 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 的最大值為____(L)____

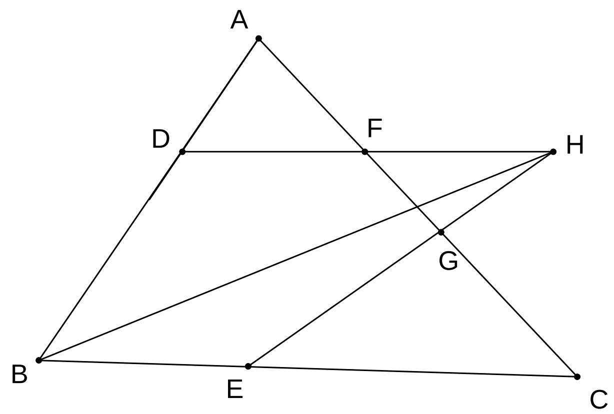
12. $\begin{cases}\sin\alpha+\cos\beta=a\\ \cos\alpha+\sin\beta=b\end{cases}$ ，求 $\sin(\alpha-\beta)=$____(M)____ （以 a,b 表示）

13. 4 個 A、4 個 B、4 個 C 排成一列，第 1 到第 4 位置稱為 I 區，第 5 到第 8 位置稱為 II 區，第 9 到第 12 位置稱為 III 區，若 A 不在 I 區，B 不在 II 區，C 不在 III 區的排列方法有 ____(N)____種

14. 如下圖（圖形中各線段之比例僅供參考，實際之比例敘述如後），

設 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\dfrac{1}{3}$ 且 $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\dfrac{1}{2}$ 且 $\dfrac{\overline{AF}}{2}=\dfrac{\overline{FG}}{1}=\dfrac{\overline{GC}}{2}$,

若 $\overrightarrow{BH}=\alpha\overrightarrow{BA}+\beta\overrightarrow{BC}$ ，則實數對$(\alpha\ ,\beta)$＝____(O)____



15. 將一矩形（邊長均為整數）的角剪去一個三角形後形成一個新的五邊形，今知此五邊形之邊長為 13, 19, 20, 25, 31（不一定照順序成五邊形），

試問此五邊形之面積為 ____(P)____

二、計算證明題（每題 10 分，共 20 分）

1. 設 $f(x)=cosx+sin(\sqrt{3}x)$，試證：$f(x)$不是週期函數

2. 對任意正整數 n，設 a_n 是方程 $x^3+\dfrac{x}{n}=1$ 的正實數根，

求證：(1) $a_{n+1}>a_n$ (5%) (2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+1)^2a_i}<1$ (5%)