

准考證號：_____

臺北市立大安高級工業職業學校 115 學年度第 3 次教師甄選
數學 科筆試試題

科目名稱：數學

配分比例：100%

考試時間：18:00~19:30

作答說明：1.請在彌封之答案卷上標明題號依序作答，答案卷上不得書寫姓名或作任何記號，否則不予計分。

2.全卷限用藍色或黑色單一顏色筆作答。

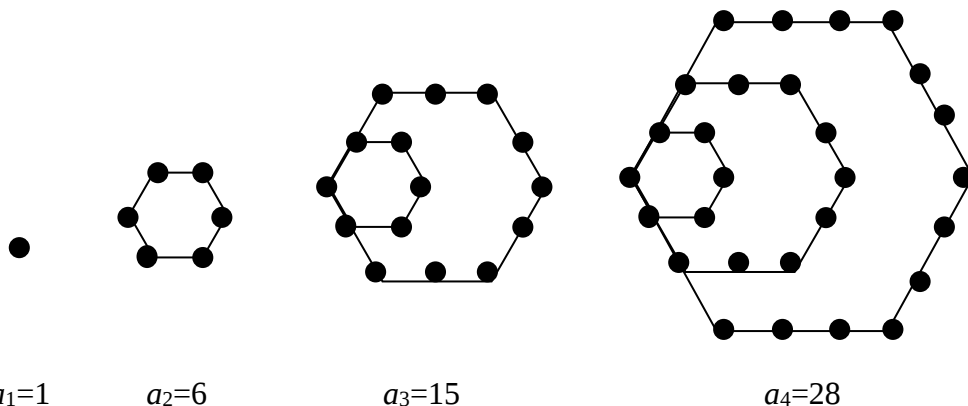
3.作答時不可使用計算機。

4.交卷時請將試題卷與答案卷一併繳交。

5.請於所發放的答案卷內完成作答，不加發答案卷。

一、填充題(每題 5 分，答案一律化到最簡分數或最簡根數，否則不予計分)

1. 已知直角 $\triangle ABC$ 其三邊長分別為 $\overline{AC}=3$ ， $\overline{BC}=4$ ， $\overline{AB}=5$ ，設 P 為 $\triangle ABC$ 內部一點，且 P 點到 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AB}$ 的距離分別為 x 、 y 、 z ，求 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ 的最大值為_____。
2. 若一個三角形的三邊長分別為 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{10}$ 、 $\sqrt{13}$ ，則其面積為_____。
3. 設 x 為實數，則 $f(x) = \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$ 的最大值為_____。
4. $\triangle ABC$ 中， D 為 $\overline{BC}$ 邊上一點，已知 $\angle ABC=75^\circ$ ， $\angle ACB=45^\circ$ ， $\angle ADB=60^\circ$ ，若 $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ ，其中 m 、 n 為實數，則 $m - n =$ _____。
5. 已知 $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$ ， $|\vec{b}| = 3$ ， $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 夾角為 45° ，若 $\vec{u} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$ ， $\vec{v} = \vec{a} - 3\vec{b}$ ，則以 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 為鄰邊的平行四邊形較短的對角線長度為_____。
6. 若多項式 $f(x)$ 除以 $x(x-1)$ 餘式為 $ax+3$ ，除以 $x(x+1)$ 餘式為 $-3x+b$ ，除以 x^2-1 餘式為 $cx+4$ ，其中 a 、 b 、 c 為實數，則 $f(x)$ 除以 $x(x^2-1)$ 的餘式為_____。
7. 設數列 $\{a_n\}$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + (2n-1), n \geq 2 \end{cases}$ ，則其一般項 a_n 可整理成 $a_n =$ _____。
8. 下圖中， a_n 為每個圖中所有黑點的個數，已知 $a_1=1$ ， $a_2=6$ ， $a_3=15$ ， $a_4=28$ ，依此規則求 $a_{10}=$ _____。

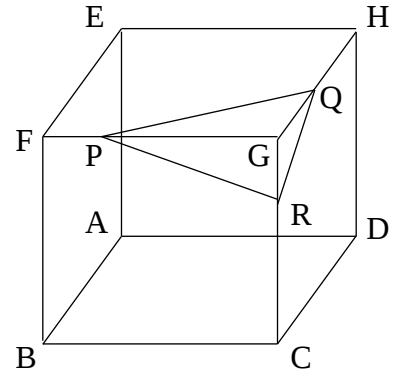


9. 已知過函數 $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx - 5$ 圖形上所有點的切線斜率中，以 $P(1,3)$ 為切點的切線斜率最大，其中 a 、 b 為實數，則 $a-b$ 之值為_____。

10. 設 $a = \log_{\sqrt{4}} \left(\sqrt{\sqrt{\cdots \sqrt{\sqrt{4 \times 4}}}} \right)$ ，其中 $\sqrt{\sqrt{\cdots \sqrt{\sqrt{4 \times 4}}}}$ 共含 2026 層二次根號，則 a 之值為_____。

11. 已知座標平面上，矩形 $OABC$ 中， $O(0,0)$ ， $A(4,2)$ ， $\overline{OA}:\overline{OC} = 2:1$ 且 B 、 C 兩點均在 x 軸上方，則 B 點的座標為_____。

12. 如右圖， $ABCD-EFGH$ 是一個邊長為 5 的正方體，已知 $\overline{GP} = 4$ ， $\overline{GQ} = \overline{GR} = 2$ ，求 A 點到平面 PQR 的最短距離為_____。



13. 求空間中兩直線 $L_1: \frac{x}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-1}{-2}$ 和 $L_2: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-6}{-2}$ 的距離為_____。

14. 甲袋中有 1 白球 1 紅球，乙袋中有 1 白球。今從甲袋取 1 球放入乙袋，再從乙袋取 1 球放入甲袋，完成此動作稱為一局。若每球被取到的機會均等，求第三局結束時，甲袋有 1 白球 1 紅球的機率為_____。

15. 設 $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ， B 為二階方陣，若 $AP=PB$ ，且 $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ ， $A^7 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ ，則 $b_1 + a_4 =$ _____。

16. 甲從 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 中任選 3 個相異數字，將它們由大到小排成一個三位數；乙從 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 中任選 3 個相異數字，也將它們由大到小排成一個三位數。求甲所排的數比乙所排的數大的機率為_____。

二、問答題(每題 10 分)

此大題為學生常犯的錯誤解法，請在答案卷上先指出學生的錯誤，並再寫出正確的詳解：

1. 題目：5 個不同的獎品全部分給甲、乙、丙、丁 4 人，每人可兼得，若甲至少分得 2 件，則共有幾種分法？

學生解：先分給甲 2 件，剩下 3 件再任意分給 4 人，所以共有 $C_2^5 \times 4^3 = 640$ 種分法

2. 題目：設 x 、 y 均為實數，且 $2 \leq x \leq 5$ ， $-4 \leq y \leq 3$ ，求下列各數的範圍：(1) $\frac{y}{x}$ (2) $x^2 + y^2$ 。

學生解：(1) $\frac{-4}{2} \leq \frac{y}{x} \leq \frac{3}{5} \Rightarrow -2 \leq \frac{y}{x} \leq \frac{3}{5}$

(2) $4 \leq x^2 \leq 25$ ， $9 \leq y^2 \leq 16 \Rightarrow 13 \leq x^2 + y^2 \leq 41$