國立屏東女子高級中學115學年度第1次教師甄選數學科試題

一、填充題：每題 5 分，共 90 分。分數均需化簡至最簡分數；比例需以最簡整數比呈現。每題全對才給分。

1、已知二次函數 $f(x)$滿足以下三條件：
(I) $f(-3+t)=f(1-t)$，對任意實數 t；
(II)在區間 $-3\le x\le 5$，$f(x)$的最大值為 24，最小值為 -84；
(III) $f(-3)>f(5)$。
試求 $f(6)=$______。

2、已知三次多項式 $f(x)$的奇次項係數和與偶次項係數和相等且 $f(0)=f(1)=12$，其函數圖形 $y=f(x)$的對稱中心為$(2,k)$，則 k 的值為______。

3、在空間坐標系中，有一正立方體 $ABCD$-$EFGH$，其中底面正方形 $ABCD$ 所在的平面方程式為 $2x-2y+z=0$，E, F, G, H 分別在 A, B, C, D 的正上方。已知頂點 A 的坐標為$(0,0,0)$，頂點 B 的坐標為 $(1, 2, 2)$，頂點 D 與 G 的 z 坐標皆為正數，且 G 的 z 坐標大於 C 的 z 坐標，則頂點 G 的坐標為______。

4、三角形 ABC 中，$\sin A:\sin B:\sin C=5:7:8$，求 $\cos A:\cos B:\cos C=$______。

5、已知 $1-\sqrt{3}i$ 為實係數方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的一根，且此方程式與方程式 $x^2+ax+2=0$ 恰有一共同的實根，求序組 $(a, b, c)=$______。

6、設A為二階方陣，I_2 為單位方陣，若 $A^2+3A+2I_2=\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 14 & 20 \end{bmatrix}$，則滿足條件的二階方陣 A 為______。

7、設空間中$\triangle ABC$ 的三頂點坐標分別為 $A(-2,7,15)$、$B(1,16,3)$、$C(10,7,3)$，試求$\triangle ABC$ 的外心坐標為____________。

8、$\left(\sqrt{1+3+\cdots+(2n-1)}-\sqrt{2+4+\cdots+2n}\ \right)=$______。

9、將 12 個完全相同的球，任意投入 3 個不同的箱子 A, B, C 中。若規定：箱子 A 必須放置奇數個球，箱子 B 必須放置偶數個球，箱子 C 的放球數量不設限（可放 0 至 12 個球），則共有______種不同的放球方法。

10、已知數列 $<a_n>$ 的前 n 項和 $S_n=2a_n+2026$ ，求 $\dfrac{S_{20}}{S_{10}}$ =______。

11、已知 $f(x)$ $(x\geq 0)$ 滿足$\dfrac{1}{3}+\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}xf(x)$，求$\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ =______。

12、空間中$L_1:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{2}=z-4$與$L_2:\dfrac{x-a}{6}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-7}{-2}$交於一點，求$L_1, L_2$之交角平分線為______。

13、已知 z 為複數且$w=1+\sqrt{3}i$，設A為複數平面上滿足$|z|\leq k$（$k>0$）的區域。若A恰好包含了方程式$(z-w)^3=8$ 的所有複數根，則k的最小值為______。

14、橢圓 $\Gamma:\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 以原點 O（0，0）為中心逆時針方向旋轉 45° 得橢圓 Γ' 的方程式為 ______。

15、將半徑為 $2\sqrt{2}$ 公分的半球狀之容器裝滿了水置於桌上，今將此容器傾斜 45°，如右圖，則流出的水體積是__________立方公分。

16、若 $x^2+y^2+axy-1$ 可被 $x+by+c$ 整除，則 $a+b+c$ 之所有可能值為______。

17、求 $y=\dfrac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x+2}$ 的最小值。

18、已知 $z^{23}=1, z\neq 1, z\in\mathbb{C}$ ，求 $\displaystyle\sum_{k=0}^{22}\frac{1}{1+z^k+z^{2k}}$ 之值。

二、證明題：每題 10 分，共 10 分。

設伯努力試驗成功的機率為 p，失敗的機率為 $q=1-p$。令隨機變數 X 的取值表示 n 次獨立試驗中的成功次數。試證明：隨機變數 X 的期望值 $E(X)=np$

國立屏東女子高級中學 **115** 學年度第 **1** 次教師甄選數學科試題簡答

一、填充題：每題 5 分，共 90 分。

1、-123	2、6	3、(1，–1，5)
4、11：7：2	5、$(-3,\ 6,\ -4)$	6、$\begin{bmatrix}1 & 0\\ -7 & -6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4 & 0\\ -2 & -6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 7 & 3\end{bmatrix}$
7、(3，9，8)	8、$n-\sqrt{n(n+1)}$	9、21
10、1025	11、9	12、$\frac{x-5}{32}=\frac{y-1}{23}=\frac{z-5}{1},\ \frac{x-5}{-4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-5}{13}$
13、$2\sqrt{3}$	14、$5x^2+2xy+5y^2=12$	15、$\frac{40}{3}\pi$
16、$4,\ 2,\ -2,\ -4$	17、$\sqrt{3}-2$	18、$\frac{46}{3}$

二、證明題：每題 10 分，共 10 分。

設伯努力試驗成功的機率為 p，失敗的機率為 $q=1-p$。令隨機變數 X 的取值表示 n 次獨立試驗中的成功次數。試證明：隨機變數 X 的期望值 $E(X)=np$

<略>