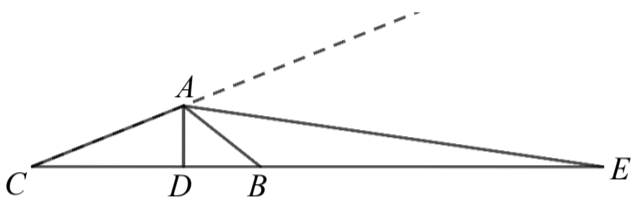


一、填充題 (每題 8 分)

1. 試求 $\prod_{k=4}^{255} \frac{\log_k(5^{k^2-1})}{\log_{k+1}(5^{k^2-4})} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(用最簡分數表示)

2. 已知 P 點為橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{10} = 1$ 上位於第一象限的動點， O 為坐標原點， A 為 Γ 在正 x 軸上的頂點， F 為 Γ 在正 y 軸上的焦點。
求當 P 點坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 時，四邊形 $OAPF$ 面積為最大。

3. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{AC} = 5$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ， \overline{AD} 為 \overline{BC} 邊上的高， \overline{AE} 為 $\angle A$ 的外角平分線交 \overline{BC} 邊的延長線於 E ，如下圖所示。
求 \overline{DE} 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



4. 設 $f(x) = (-3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2)^4$ ，則 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_1^{2+h} f(t) dt - \int_1^2 f(t) dt \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. $f(x)$ 為實係數四次多項式，已知 $(1, 115)$ 為 $y = f(x)$ 圖形的反曲點，且在此點的切線為水平線。

又 $g(x) = (x-2)^3 + 20(x-2) + 121$ 圖形的反曲點在 $y = f(x)$ 上，且 $y = g(x)$ 與 $y = f(x)$ 圖形在此點有相同的切線。

試求 $f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 試求 $\begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^6 + \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^6 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 設 a, b, c, d 為實係數四次方程式 $x^4 + 3x^3 + x - 2 = 0$ 的四個複數根，

則 $(a^4 + 3a^3 + a^2 + a + 2)(b^4 + 3b^3 + b^2 + b + 2)(c^4 + 3c^3 + c^2 + c + 2)(d^4 + 3d^3 + d^2 + d + 2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 已知複數 z 滿足 $\text{Arg}(z+3) = \frac{3\pi}{4}$ ，則當 $z = \underline{\hspace{2cm}}$ 時， $|z+6| + |z-3i|$ 有最小值。

二、綜合題 (每題 12 分)

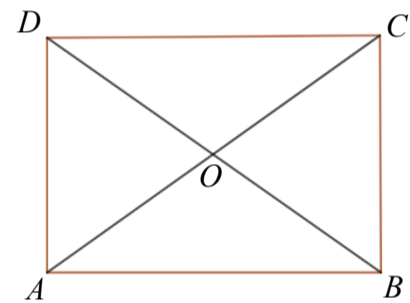
1. 底下是一道數學試題與學生作答內容，在解題的過程中，哪裡出現錯誤，請問你會如何協助，指出他的錯誤迷失，修正其概念，並引導解題？

題目：已知 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，且 $\sin\theta, \cos\theta$ 為方程式 $2x^2 + px + q = 0$ 的兩根，求 $p^2 - 8q$ 的值。

解： $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\theta = \cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，又 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow (\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow 2\cos^2\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta - \frac{2}{3} = 0$

比較 $2x^2 + px + q = 0$ 的係數，得知 $\begin{cases} p = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ q = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow p^2 - 8q = (\frac{2}{\sqrt{3}})^2 - 8(-\frac{2}{3}) = \frac{20}{3}$

2. 如右圖，在矩形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{BC} = \sqrt{2}$ ， \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於 O 。今將 $\triangle AOB$ 剪去，剩餘部分沿 \overline{OC} 、 \overline{OD} 折疊，使 \overline{OA} 、 \overline{OB} 重合，便會形成以 $A(B)$ 、 C 、 D 、 O 為頂點的四面體，試證明平面 OCD 與平面 ACD 垂直。



3. 已知 m 、 n 皆為正實數且滿足 $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = 1$ ，試求 $\frac{mn}{3m+4n}$ 的最小值及此時 m 、 n 之值。