

臺北市立中崙高級中學 114 學年度第二次教師甄選數學科筆試試題卷

考生序號：..... 姓名：.....

※注意：請務必於上欄填寫「考生序號」及「姓名」

請於答案卷作答區作答，並標明題號 1. 2. .... 12. 。

---

一、填充題（每格 7 分，共 77 分）

1. 已知平面上某公園內有一圓  $C: x^2 + y^2 = 12$ ，圓  $C$  的內部是禁止踐踏的草皮。

阿中在點  $A(-4, 0)$  要去與位於點  $B(3\sqrt{3}, 1)$  的阿崙會合，則

他在不違規踐踏圓  $C$  內部草皮的前提下，可以走的最短路徑長為\_\_\_\_\_。

2. 已知  $n$  為正整數，且  $2025!$  整除  $(n!)!$ ，則  $n$  的最小值為\_\_\_\_\_。

3. 阿崙有一個正立方體  $A$  的捏陶作品，其邊長為 1；假設其外接球面為  $S$ 。

阿崙想要在這一個正立方體  $A$  的某個面上，再放置一個邊長為  $a$  的小正立方體  $B$ ，但是  $B$  不能碰到  $S$  的外部，則  $a$  的最大值為\_\_\_\_\_。

4. 已知  $ABCD$  為正方形， $P$  為  $\overline{BC}$  上一點，連接  $\overline{PD}$ 。正方形  $ABCD$  內部有一圓  $\Gamma$  與  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BP}$ 、 $\overline{PD}$  均相切。

若  $\overline{PC} = 5$ 、 $\overline{CD} = 12$ ，則圓  $\Gamma$  的半徑長為\_\_\_\_\_。

5. 已知阿崙有 50 張卡牌，上面分別寫著編碼  $1, 2, 3, \dots, 50$  號。阿崙隨機洗牌後，將所有卡牌由上而下疊成一疊，假設編碼 20 號卡牌與編碼 25 號卡牌之間有  $X$  張卡牌（不含編碼 20 號與編碼 25 號的卡牌），則  $X$  的期望值為\_\_\_\_\_。

6. 阿崙有一個半徑 20 公分的球形容器放置在水平面上，其內部中空，且材質厚度不計。如果他往裡面注水，使得容器內水面的高度為 25 公分，則他注入的水量為\_\_\_\_\_立方公分。

7. 已知  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = 20$  且  $\overline{AC} = 25$ 。令  $G$  與  $O$  分別為  $\triangle ABC$  的重心與外心，則  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AO}$  的最大值為\_\_\_\_\_。

8. 已知  $P$  為正方形  $ABCD$  內部一點， $\overline{PA} = \sqrt{7}$ ， $\overline{PB} = 1$ ， $\overline{PC} = 3$ ，試求此正方形面積為\_\_\_\_\_。

9. 已知  $\triangle ABC$  的頂點  $A(-4, 2)$ ，二條中線所在直線方程式分別為  $3x - 2y + 2 = 0$  和  $3x + 5y - 12 = 0$ ，試求另二頂點坐標為\_\_\_\_\_。

10. 已知一正方形  $ABCD$  的頂點  $A$ 、 $B$  二點落在直線  $y=x+4$  上，頂點  $C$ 、 $D$  二點落在拋物線  $x=y^2$  上，求此正方形的面積為\_\_\_\_\_。

11. 已知  $ABCDEFGH$  為單位圓上的內接正七邊形， $P$  為此單位圓上的任一點，求

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PF}^2 + \overline{PG}^2 = \text{_____}。$$

## 二、綜合題 (23 分)

12. 下列試題為 111 學年度分科測驗數甲考題，

假設兩數列  $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ ，對所有正整數  $n$  都滿足  $b_n + \frac{4n-1}{n} < a_n < 3b_n$ 。已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$ ，試選出正確的選項。

(1)  $b_n < 6 - \frac{4n-1}{n}$

(2)  $b_n > \frac{4n-1}{2n}$

(3) 數列  $\langle b_n \rangle$  有可能發散

(4)  $a_{10000} < 6.1$

(5)  $a_{10000} > 5.9$

試以身為中崙高中數學教師的身分，針對這一題的每一個選項，請逐一對學生進行詳細解題說明。

臺北市立中崙高級中學 114 學年度第二次教師甄選  
數學科筆試答案

一、填充題(每格 7 分，共 77 分)

1.  $6+\sqrt{3}\pi$

2. 7

3.  $\frac{1}{3}$

4.  $\frac{21}{5}$

5. 16

6.  $\frac{21875}{3}\pi$

7.  $\frac{1025}{6}$

8.  $8+\sqrt{14}$

9. (4,0)、(2,4)

10. 18 或 50

11. 14

二、綜合題(23 分)

12. 參考解答(2)(5)