

國立嘉義高級中學 114 學年度第一學期第 2 次教師甄選-數學科試題

一、填充題：共 15 題，每題 6 分，合計 90 分

1. 已知  $0 \leq x \leq 4\pi$ ，求方程式  $4\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - 4\cos x = 1$  之所有實根總和為\_\_\_\_\_。
2. 設圓  $C: (x-6)^2 + (y-4)^2 = 4$ ，今有一質點自點  $P(2,2)$  發射，射向  $x$  軸上之  $Q$  點後反射恰可碰觸到圓  $C$ ，則  $Q$  點在  $x$  軸上所有可能的位置所構成的區間長度為\_\_\_\_\_。
3.  $x \in R$ ， $[x]$  表高斯符號，若  $[x] + [4x] = 6$ ，則  $x$  的範圍為\_\_\_\_\_。
4. 方程式  $|x| + 3|y| = 6$  的圖形為  $\Gamma$ ，則將  $\Gamma$  上任一點  $(a,b)$  變換成  $(a',b') = (5a+2b-1, a-b+4)$  得圖形  $\Gamma'$ ，則  $\Gamma'$  的面積為\_\_\_\_\_。
5. 小明有 5 隻牛、4 隻豬及 7 隻馬玩偶，則她將這 16 隻不同的玩偶配對，每對的動物種類不同，則共有\_\_\_\_\_種配對方法。
6. 已知平面  $E$  包含直線  $\begin{cases} x=1 \\ y+z=3 \end{cases}$ ，且兩直線  $\frac{x-9}{2} = \frac{y+10}{1} = \frac{z-11}{-1}$  及  $\frac{x-9}{-2} = \frac{y+10}{2} = \frac{z-11}{1}$  在平面  $E$  上的投影恰為一直線，則平面  $E$  的方程式為\_\_\_\_\_。

7. 若  $a, b \in \mathbb{N}$ ，則有\_\_\_\_\_組數對  $(a, b)$  滿足  $\sqrt{\log a} - \sqrt{\log b} + \log \sqrt{a} + \log \sqrt{b} \leq 0$ 。

8. 若  $f(x)$  為一實係數多項函數，已  $\int_0^1 f(x)f'(x)dx = 1$  且  $\int_0^1 (f(x))^3 f'(x)dx = 2$ ，則  $\int_0^1 (f(x))^5 f'(x)dx$  之值為\_\_\_\_\_。

9. 設  $A, B$  為非零二階方陣， $I$  表示二階的單位矩陣， $O$  表二階的零矩陣，滿足  $\begin{cases} A = 2I + B \\ AB = O \end{cases}$ ，若  $(A + I)^8 = kA + I$ ，其中  $k$  為實數，則  $k =$ \_\_\_\_\_。

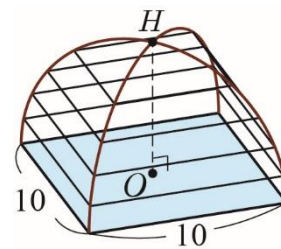
10. 已知橢圓  $\frac{x^2}{m} + y^2 = 1$  ( $m > 1$ ) 和雙曲線  $\frac{x^2}{n} - \frac{y^2}{3} = 1$  ( $n > 0$ ) 有相同的兩個焦點  $F_1, F_2$ ， $P$  點是它們的一個交點，則  $\tan \angle F_1 P F_2 =$ \_\_\_\_\_。

11. 若  $\max\{p, q\}$  代表  $p, q$  中較大的數， $\min\{p, q\}$  代表  $p, q$  中較小的數，則方程式：

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\max\{a, b\} + \frac{2}{3}\min\{a, b\} = 2025 \\ \frac{1}{3}\max\{b, c\} + \frac{2}{3}\min\{b, c\} = 2026 \\ \frac{1}{3}\max\{c, a\} + \frac{2}{3}\min\{c, a\} = 2027 \end{cases} \text{ 的解 } (a, b, c) = \text{_____}。$$

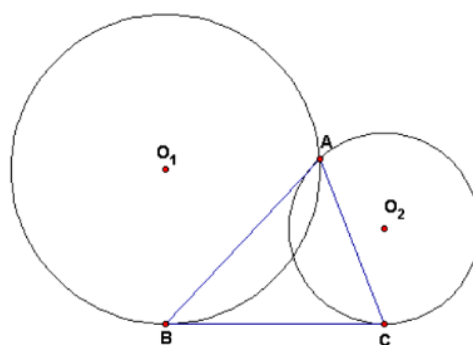
12. 若  $S$  是  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 2025\}$  的一個子集，且  $S$  中任兩個元素皆非相差 2，也非相差 7，則  $S$  個數的最大值為\_\_\_\_\_。

13. 右圖是動物園新建立的大型鳥籠，其建立方式如下：在一個邊長為 10 公尺的正方形平臺上，立起兩支以底面對角線為直徑的半圓形鋼架，落腳點就在平臺的四個頂點上；而半圓形鋼架的交點  $H$  在底面（邊長 10 公尺的正方形）中心點  $O$  的正上方，即線段  $OH$  垂直底面；然後在鋼架上張起鐵絲網，使得每個平行底面的鐵絲網都是頂點落在鋼架上的正方形。此鳥籠的容積為\_\_\_\_\_立方公尺。



14. 已知實數  $x, y$  滿足  $\frac{1}{x} + \frac{8}{y} = 1$ ，則  $(x-1)^2 + (y-8)^2$  的最小值為\_\_\_\_\_。

15. 兩圓  $O_1$ 、 $O_2$  均通過  $\triangle ABC$  的頂點  $A$ ，且分別與  $\overline{BC}$  邊相切於  $B$  點及  $C$  點，若圓  $O_1$ 、圓  $O_2$  的面積分別為  $m$  和  $n$ ，則以  $m$  和  $n$  表示  $\triangle ABC$  的外接圓面積為\_\_\_\_\_。



二、計算題(10 分，需有計算過程，否則不予計分)

四邊形  $ABCD$  中， $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ ， $\overline{BC} = 4$ ， $\overline{CD} = 3$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，點  $P$  在  $\overline{AB}$  上，點  $Q$  在  $\overline{CD}$  上，若  $\overline{PQ}$  平分四邊形  $ABCD$  的面積，則  $\overline{PQ}$  的最小值為何？