

說明：1. 本試題共有二大題，第一大題填充題，每題 5 分，共 30 分

第二大題計算說明題，各題配分標於題末，共 70 分

2. 各題答案若非整數，請以有限小數、最簡分數或最簡根式作答。

一、填充題：(共 6 格，每格 5 分，共 30 分)

1. (1) 從一個 $9 \times 9 \times 9$ 正立方體開始。小歐從中移除

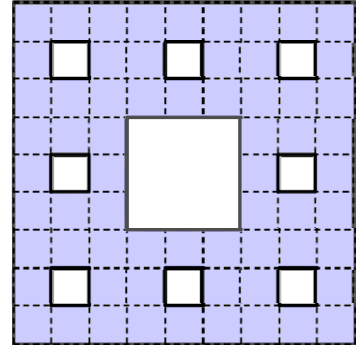
儘可能少的 $1 \times 1 \times 1$ 正立方體，使得最後的造型

之前視圖、側視圖與俯視圖都與右圖所示相同。

請問小歐總共移除_____個 $1 \times 1 \times 1$ 的正立方體。

(2) 承(1)，小歐所得到的造型之表面積為_____

平方單位。



答：(1) 329；(2) 1056

2. (1) 若一振幅為 1 的正弦波 $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ 通過 $(\frac{1}{4}, 0)$ 、 $(\frac{1}{3}, 1)$ 、 $(\frac{1}{2}, -1)$ 三點，其中

$a > 0$ 、 $b > 0$ 、 $c > 0$ 、則週期的最大可能值為_____

(2) 承(1)，求有 $f(x)$ 有最大週期時， c 的最小值_____

答：(1) $\frac{1}{3}$ ；(2) $\frac{\pi}{2}$

3. 把 1、2、3、...、12 共 12 個自然數隨意放置在一個圓周上，若相鄰 3 數中 3 個全為奇數的有 1 組，恰好 2 個為奇數的有 x 組，恰好 1 個為奇數的有 y 組，全部都不是奇數的有 0 組。

求：(1) 所有可能的數對 (x, y) 有_____種

(2) 12 個自然數在圓周上的相對關係能滿足題意的的方法數為 $(6!)^2 \cdot X$ ，求 $X =$ _____

答：(1) 1；(2) 7

二、計算說明題(共 70 分)

1. 試比較 $5^{-\sqrt{2}} \times 7^{-\sqrt{3}}$ 、 $5^{-\sqrt{3}} \times 7^{-\sqrt{2}}$ 兩數的大小。(5 分)

答： $5^{-\sqrt{2}} \times 7^{-\sqrt{3}} < 5^{-\sqrt{3}} \times 7^{-\sqrt{2}}$

2. 設 $f(x) = ax^4 + bi \cdot x^3 + cx^2 + di \cdot x + e$ ，其中 m 、 n 、 a 、 b 、 c 、 d 、 e 皆為實數。

若 $m + ni$ 為方程式 $f(x) = 0$ 的一根，

試說明： $m - ni$ 、 $-m + ni$ 、 $-m - ni$ 三數中，何者亦必為方程式 $f(x) = 0$ 的根？(10 分)

答： $-m + ni$

3. (1) 將質數由小到大排列，第50個質數為229，試估計 $\log 229$ 的值。

(估計值在 $[\log 229 - 10^{-k}, \log 229 + 10^{-k}]$ 內得 $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ 分，最多10分)

(2) 請說明你的估計結果跟實際值 $\log 229$ 相比，會是低估或是高估？為什麼？(5分)

答：(1) $\log 229 \approx 2.359835482\dots$ ；

(2) 參考答案，若(1)採用內插法

因為 $y = \log x$ 為凹口向下的圖形，割線在曲線的下方

故內差法的結果會比實際值稍低，因此上述估計值應為低估

4. (1) 設 a 、 b 為正實數，且 $a > b$ ， $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$ ，求 $\frac{a^3 + b^3}{a^3 - b^3} = ?$ (5分)

(2) 設 a 、 b 為正實數，且 $a > b$ ， $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = k$ ，求 $\frac{a^3 + b^3}{a^3 - b^3} = ?$ (以 k 表示) (10分)

答：(1) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ；(2) $\frac{k-1}{k+1} \sqrt{\frac{k+2}{k-2}}$

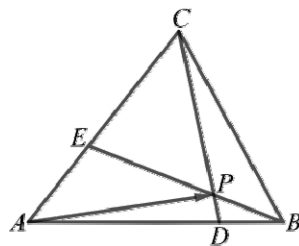
5. 如右圖， $\triangle ABC$ 中，

(1) 已知 $\overline{AD}:\overline{DB} = 3:1$ 且 $\overline{AE}:\overline{EC} = 2:3$ ，且 \overline{BE} 與 \overline{CD} 交於 P 點，

若 $\overrightarrow{AP} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$ ，求 $(\alpha, \beta) = ?$ (5分)

(2) 已知 $\overline{AD}:\overline{DB} = a:b$ 且 $\overline{AE}:\overline{EC} = c:d$ ，且 \overline{BE} 與 \overline{CD} 交於 P 點，

若 $\overrightarrow{AP} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$ ，求 $(\alpha, \beta) = ?$ (以 a 、 b 、 c 、 d 表示) (10分)



答：(1) $(\frac{9}{14}, \frac{1}{7})$ ；(2) $(\frac{ad}{(a+b)(c+d)-ac}, \frac{bc}{(a+b)(c+d)-ac})$

6. (1) 試利用數學歸納法證明：對每個大於1的整數 n ，恆有

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\cdots\sqrt{n}}}}} < \frac{3}{\sqrt[n+2]{2^{n-1}}}。$$

請注意：上式右端的分母是 $n+2$ 的正 2^{n-1} 次方根。(10分)

(2) 試證：對每個大於1的整數 n ，恆有 $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\cdots\sqrt{n}}}}} < 3$ 。(5分)

答：(1) 略；(2) 略