高雄市114學年度市立高級中等學校聯合教師甄選

數學科試題卷

【※答案一律寫在答案本上】

一、計算證明題(1至6題每題5分，7至16題每題7分，共100分)

請寫下完整計算過程，否則不予計分

1、設 m 與 n 均為正實數，且滿足 $\log_9 m=\log_{12} n=\log_{16}(m+n)$，試問 $\dfrac{n}{m}$ 之值為________

2、有5筆二維數據 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)、…、(x_5,y_5)。已知的統計資料如下：

$$x_1+x_2+\cdots+x_5=15\text{，}y_1+y_2+\cdots+y_5=10$$

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_5^2=102\text{，}y_1^2+y_2^2+\cdots+y_5^2=40$$

若小高在求 y 對 x 的迴歸直線方程式 $y=mx+b$ 時，誤將迴歸直線的斜率公式記為 $\dfrac{(x_1+\mu_x)(y_1+\mu_y)+\cdots(x_5+\mu_x)(y_5+\mu_y)}{(y_1+\mu_y)^2+\cdots+(y_5+\mu_y)^2}$，其中 μ_x、μ_y 為數據 X、Y 的算術平均數。在其他的計算均無錯誤下，小高計算出的迴歸直線方程式為 $y-2=\dfrac{3}{5}(x-3)$。試問針對這5筆數據求 y 對 x 的迴歸直線方程式，正確的斜率 m 應該為________

3、$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB}=9$，$\overline{AC}=15$，$\angle ABC=3\angle ACB$，則 $\overline{BC}$ 邊的長為多少?________

4、設集合 $I = \{1,2,3,4,5\}$，選擇 I 的兩個非空子集合 A、B，使得 B 集合中的最小的數字大於 A 集合中最大的數字，則集合 A、B 有幾種不同的取法？________

5、3 顆蘋果，4 顆梨子，5 顆李子分給 3 個兒子，每人至少得一個，

有____________種分法

6、已知兩互相垂直的平面向量$\vec{a}$與$\vec{b}$，$|\vec{a}| = 2|\vec{b}| = 10$，當$0 \leq t \leq 1$時，向量

$t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$與向量$(t-\frac{1}{5})\vec{a} + (1-t)\vec{b}$的最大夾角為$\theta$，則$\cos\theta$的值為何?

____

7、設兩複數z_1與z_2滿足$|z_1| = |z_1 + z_2| = 3$，$|z_1 - z_2| = 3\sqrt{3}$，則

$\log_3|(z_1 \cdot \overline{z_2})^{100} + (\overline{z_1} \cdot z_2)^{100}|$的值為何? ________

8、設空間中兩點$A(-4,2,5), B(5,5,-1)$，與直線 L：$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+5}{-2}$。在 L 上

找一點 P，試求$\overline{PA} + \overline{PB}$最小值為____________

9、已知$A(1,0,0),B(0,2,0),C(0,0,3)$，O 為原點，若四面體 $OABC$ 之體積被平面$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{k}=1$所平分，試求實數 k 為__________

10、假設以$\cos 9°$為一根的最小次數整係數方程式為 $f(x)=0$，求 $f(x)=$__________

11、已知f(x)為定義在實數上的奇函數，$f(1)=1$，且對於任意$x<0$均有$f\left(\frac{x}{x-1}\right)=xf(x)$，求$f(1)f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{99}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)f\left(\frac{1}{98}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{50}\right)f\left(\frac{1}{51}\right)$的值？________

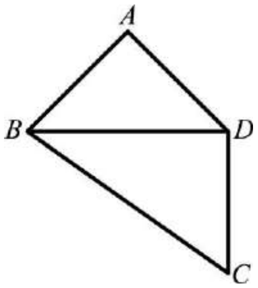
12、已知函數$f(x)=\frac{\sin(\pi x)-\cos(\pi x)+2}{\sqrt{x}}$，其中$\frac{1}{4}\le x\le\frac{5}{4}$，試求f(x)的最小值__________

13、已知$a_1=1$，$a_2=-1$且$a_n+a_{n-1}+2a_{n-2}=0$，試證明$2^{n+2}-7a_n^{\ 2}$為完全平方數

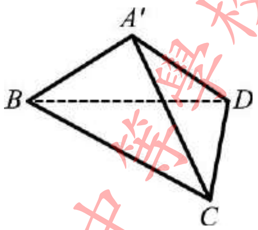
14、如圖(一)，在四邊形 $ABCD$ 中，已知$\overline{AB}=\overline{AD}=\overline{CD}=1$，$\overline{BD}=\sqrt{2}$，$\overline{BD}\perp\overline{CD}$。今將四邊形 $ABCD$ 沿對角線$\overline{BD}$折成四面體 $A'-BCD$，

使$\angle A'DC=90^\circ$，如圖(二)，若$\overrightarrow{A'C}$與$\overrightarrow{BD}$所夾的角為 α，

求 cosα = ________



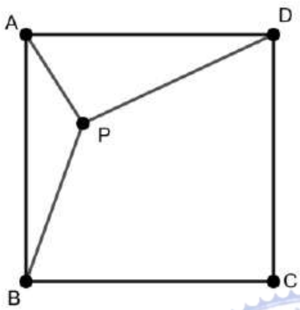
圖(一)



圖(二)

15、如圖(一)，正方形 $ABCD$ 內部一點 P，$\overline{PD}=5\sqrt{2},\overline{PB}=4\sqrt{2},\overline{PA}=3$，

求正方形 $ABCD$ 面積= ____________



圖(一)

16、有一種在數線上移動一個棋子的遊戲，移動棋子的方式是以投擲一顆公正骰子來決定，其規則如下：

（一）當所擲點數為 1 點時，棋子不移動。

（二）當所擲點數為 3 或 5 點時，棋子向左（負向）移動「該點數減 1」單位。

（三）當所擲點數為偶數時，棋子向右（正向）移動「該點數的一半」單位。

第一次擲骰子時，棋子以原點當起點。第二次開始，棋子以前一次棋子所在位置為該次的起點。例如，投擲骰子二次，第一、二次分別擲出點數為 5 點、2 點時，該棋子先向左移動 4 單位至坐標 -4，再向右移動 1 單位至坐標 -3。試問投擲骰子三次，棋子在原點的機率為________