

新竹市立香山高級中學 114 學年度教師甄選

科目：高中數學科

一、單選題(每題 5 分，共計 50 分)

1. (D) 設 a, b 為正數，如果方程式 $x^2 + ax + 2b = 0$ 與 $x^2 + 2bx + a = 0$ 的解都是實數，則滿足上述條件的 $a + b$ 之最小值為下列何者？
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8
2. (A) 試求極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+(n-1)} + \frac{1}{n+n} \right)$ 之值為下列何者？
(A) $\ln 2$ (B) $2 \ln 2$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1 (E) 2
3. (D) 已知導函數 $f'(0) = 3$ ，則極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(\sin x)}{x}$ 之值為下列何者？
(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 9
4. (E) 已知 A 為一個十位數，其數字由左至右分別為 a_1, a_2, \dots, a_{10} ，其中 $a_1 = 1$ ，而 a_2, a_3, \dots, a_{10} 皆為 0 或 1，且滿足 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$ ，則滿足這樣條件的 A 之個數為下列何者？
(A) 122 (B) 123 (C) 124 (D) 125 (E) 126
5. (B) 設 n 為正整數，如果 $2000 < C_1^n + C_2^n + C_3^n + \cdots + C_n^n < 3000$ ，則 n 之值為下列何者？
(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14
6. (C) 試問 $\log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \log(\tan 3^\circ) + \cdots + \log(\tan 88^\circ) + \log(\tan 89^\circ)$ 之值為下列何者？
(A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$ (E) 1
7. (D) 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = 2$ ，如果 \overline{BC} 邊上有 100 個相異的點 P_1, P_2, \dots, P_{100} ，且設 $a_k = \overline{AP_k}^2 + \overline{BP_k} \cdot \overline{P_kC}$ ，其中 $k = 1, 2, \dots, 100$ ，則 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100}$ 之值為下列何者？
(A) 100 (B) 200 (C) 300 (D) 400 (E) 600
8. (D) 試問 $\cos^2 80^\circ + \cos^2 160^\circ + \cos 80^\circ \cos 160^\circ$ 之值為下列何者？
(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{5}{4}$
9. (B) 試問極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$ 之值為下列何者？
(A) 0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) 1
10. (C) $\triangle ABC$ 中，已知 D 為邊 \overline{BC} 上一點，使得 $\angle CAD = \angle DAB = 60^\circ$ ；如果 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AC} = 2$ ，則 \overline{AD} 之長為下列何者？
(A) $\frac{2}{3}$ (B) 1 (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$ (E) 2

二、多選題(每題 7 分，共計 35 分;每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項)

1. (BE) 設 p, q, r 為質數，如果 p 整除 $qr-1$ ， q 整除 $rp-1$ ，且 r 整除 $pq-1$ ，則下列哪些選項是正確?

- (A) $q-p=4$ (B) $r-p=3$ (C) $p+q+r=23$ (D) pqr 可整除 $pq+qr+rp$ (E) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{pqr} = 1$

2. (ACE) 設 A 為 n 階方陣，以符號 $\det(A)$ 表示方陣 A 的行列式，則下列哪些敘述恆正確?

- (A) 如果 $\text{rank}(A) < n$ ，則 $\det(A) = 0$
(B) 如果矩陣 B 為將矩陣 A 中的某一列乘以一個非零之常數 c ，且 $c \neq 1$ ，則 $\det(B) = \det(A)$
(C) 如果 B 為 n 階方陣，則 $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
(D) 如果 B 為 n 階方陣，則 $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$
(E) 如果 A 為 n 階可逆方陣， $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ 。

3. (CE) 已知 a, b 為實數，且 $a \neq 0$ ，如果一多項式 $f(x)$ 除以 $ax+b$ ，得商式 $q(x)$ ，餘式為 r ，其中 r 為實數，則下列哪些選項是正確的?

- (A) $f(x)$ 除以 $x + \frac{b}{a}$ ，得商 $q(x)$ ，餘式為 r
(B) $xf(x)$ 除以 $ax+b$ ，得商 $xq(x) - \frac{r}{a}$ ，餘式為 $\frac{br}{a}$
(C) $xf(x)$ 除以 $ax+b$ ，得商 $xq(x) + \frac{r}{a}$ ，餘式為 $-\frac{br}{a}$
(D) $x^2f(x)$ 除以 $ax+b$ ，得商 $x^2q(x) + \frac{r}{a}x + \frac{br}{a^2}$ ，餘式為 $-\frac{b^2r}{a^2}$
(E) $x^2f(x)$ 除以 $ax+b$ ，得商 $x^2q(x) + \frac{r}{a}x - \frac{br}{a^2}$ ，餘式為 $\frac{b^2r}{a^2}$

4. (BDE) 已知 a, b, c, d 為正整數，如果 $a^5 = b^4, c^3 = d^2$ ，且 $c-a=19$ ，則下列哪些選項是正確?

- (A) $c=99$ (B) $b-a=162$ (C) $b-c=141$ (D) $d-a=919$ (E) $a+b-c=224$

5. (ACD) 已知 $\sqrt{6}$ 的整數部分是 a ，小數部分是 b ，且 n 為正整數，如果 $na + \frac{5}{b}$ 的整數部分是 2025，則下列哪些選項是正確?

- (A) $b = \sqrt{6} - 2$ (B) $b = 3 - \sqrt{6}$ (C) $\frac{5}{b}$ 的整數部分是 11 (D) $n=1007$ (E) $n=1008$

三、填充題(每題 5 分，共計 15 分) 請於答案卷 作答

1. 已知正整數 m, n 滿足 $n = \sqrt{m-184} + \sqrt{m+24}$ ，當 n 有最大值時，則 m 之值為 2785。

2. 已知一圓的圓心為 O 點，且 \overline{AB} 為此圓的直徑，如果 \overline{CD} 為一弦且垂直 \overline{AB} 於 E 點，且 $\overline{CD} \neq \overline{AB}$ 。又 \overline{AB} 的長度為二位整數， \overline{CD} 的長度正好是此二位數的個位數字與十位數字互換位置，且 \overline{OE} 的長度為正有理數，則 \overline{AB} 的長度為 65。

3. 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，且 $\angle A = 108^\circ$ ，則 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ 之比值為 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。