

臺北市立第一女子高級中學 114 學年度第二次正式教師甄選

數學科試題暨測驗題答案

一、填充題（每格 8 分，共 64 分）

1. 已知 k 為實數，且 α, β 為方程式 $x^2 + kx - 2025 = 0$ 的兩根。若方程式 $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ 有重根 r ，則 $r = \frac{3\sqrt[3]{300}}{2}$ 。（答案需化為最簡根式）

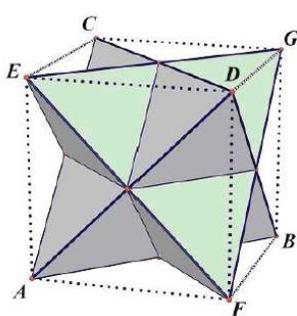
2. 平面上非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 滿足 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，且 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 20|\vec{a}|$ 、 $\vec{c} \cdot \vec{a} = 25|\vec{b}|$ ，則 $|\vec{c}|$ 的最小值為 $10\sqrt{10}$ 。

3. 阿綠想在她的表演服裝縫上 6 顆相同的紅色鈕扣、3 顆相同的綠色鈕扣和 3 顆相同的黃色鈕扣。若所有鈕扣需鉛直地排成一直線，且相鄰鈕扣不同色，則阿綠有 100 種排列方法。

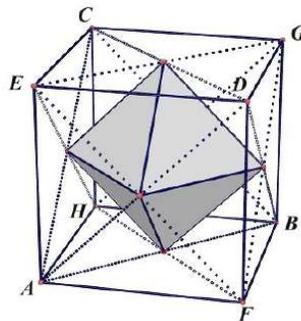
4. 已知 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，其中 $a_5 = 1$ ，公差 $d > 0$ ，且 $\sum_{k=1}^7 \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2}} = 7$ ，則 $d = \frac{5}{12}$ 。

5. 求值： $\int_{-2}^2 \max\{x, x^2, x^3 - 2x\} dx = \frac{71}{12}$ 。

6. 阿綠由一個正六面體雕刻出一個立體作品（如圖一），此立體作品是正四面體 $ABCD$ 與正四面體 $EFGH$ 之嵌合。已知兩正四面體 $ABCD$ 與 $EFGH$ 重疊之部分，剛好是以原正六面體各面之中心為頂點的正八面體（如圖二）。若原正六面體的稜長為 1，則圖一中的立體作品之體積為 $\frac{1}{2}$ 。



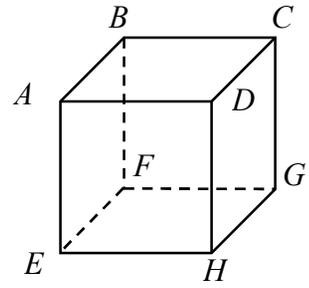
(圖一)



(圖二)

7. 當 $0 \leq x \leq 2025\pi$ 時，方程式 $2^x(1 + \cos x) = 2$ 共有 2026 個相異實數解。

8. 一隻螞蟻沿著正立方體 $ABCD-EFGH$ (如右圖) 的稜爬行，每次移動都是從某個頂點沿著正立方體的稜爬行至某個相鄰的頂點，且到每個相鄰頂點的機率均為 $\frac{1}{3}$ 。已知這隻螞蟻一開始從 A 點出發，則在五次移動之後，到達 G 點的機率為 $\frac{20}{81}$ 。



二、計算證明題 (共 86 分)

1. (18 分) 我們知道，對於一組數據 x_1, x_2, \dots, x_n 而言，算術平均數 $\mu = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ ，

而當我們要計算變異數 σ^2 時，有兩個公式：

$$\begin{cases} \sigma^2 = \frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2}{n} \\ \sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \mu^2 \end{cases} .$$

學生阿綠發問：為什麼要有兩個不同的公式？不能只學第一個就好了嗎？

請問你會如何向阿綠解說？

2. (18 分) 阿綠練習二階考題如下：

已知對於實數 x 而言， $[x]$ 表示不大於 x 之最大整數。若 $[x] + [3x] = 5$ ，試求出 x 之範圍。

以下是阿綠解題的過程，請你

(1) 找出錯誤之處； (2) 提供正確作法； (3) 闡述你向阿綠解說的過程。

已知 $x - 1 < [x] \leq x$

$$3x - 1 < [3x] \leq 3x$$

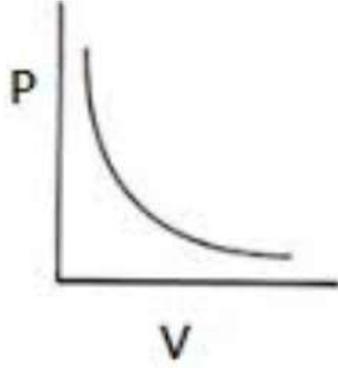
$$\text{兩式相加得 } 4x - 2 < [x] + [3x] \leq 4x \Rightarrow 4x - 2 < 5 \leq 4x ,$$

$$\text{解得 } \frac{5}{4} \leq x < \frac{7}{4}$$

3. (18分) 阿綠在化學課時學到了波以耳定律：

「在定量定溫下，理想氣體的壓力與體積成反比。」

即 $PV = k$ ，其中 P 表示氣體的壓力， V 表示氣體的體積， k 為一正常數。其圖形如下：



阿綠覺得波以耳定律的圖形應該是一條斜的拋物線，但無法證明。請問阿綠的想法對嗎？

如果正確，請提供證明；如果錯誤，請更正之。

並闡述你向阿綠解說的過程。(阿綠只熟知拋物線、橢圓、雙曲線的定義與標準式)

4. (16分) 從一個 $n \times n$ 的方格紙中，隨機選取兩條相異縱線與兩條相異橫線，使其圍成一個矩形，

令隨機變數 X_n 表示所圍出的矩形面積， $E(X_n)$ 表示 X_n 的期望值，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(X_n)}{n^2}$ 之值。

5. (16分) 已知坐標平面上有兩定點 $A(-1,2)$ 、 $B(1,4)$ ，以及 x 軸上的一動點 P ，

當 $\angle APB$ 有最大值時，試求 P 點坐標。