

國立高雄師範大學附屬高級中學 114 學年度 教師甄試

本科專業：高中數學科試題

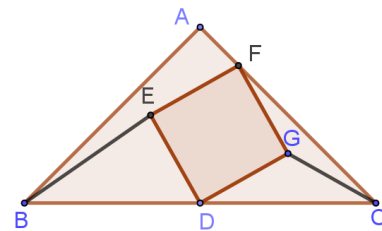
※考試時間：15:20~16:40，共 80 分鐘。

※作答注意事項：一律在答案卷上作答，請務必註明題號

計算證明題：(每題 10 分，共 100 分，每題須詳述計算過程，否則不予計分)

1. 如右圖，等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， D 為 \overline{BC} 的中點，四邊形 $DEFG$ 為正方形，且點 F 為 \overline{AC} 邊上。若 $\overline{BE} = \sqrt{3} \cdot \overline{CG}$ ， $\overline{BC} = 4$ ，試求正方形 $DEFG$ 的面積之值？

正確答案： $4 - 2\sqrt{2}$



2. 設 z 是 1 的 7 次方根， $z \neq 1$ ，試求 $z + z^2 + z^4 = ?$

正確答案： $\frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

3. 設 $f(x)$ 為整係數多項式，假設 $g(x) = \int xf(x)dx$ ，且 $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = x^4 - 4x^2 + x - 7$ ，求多項式 $f(x)$ ？

正確答案： $f(x) = x^3 - 7x + 1$

4. 座標平面上，在以 $O(0,0)$ ， $P(0,2)$ ， $Q(1,2)$ ， $R(1,0)$ 為頂點的矩形(含邊界)，令 Ω 為滿足下述條件的點 $A(x,y)$ 所成的區域：與點 $A(x,y)$ 的距離為 $|2x - y|$ 之所有點所形成圖形完全落在矩形 $OPQR$ (含邊界)內，試求區域 Ω 的面積。

正確答案： $\frac{1}{2}$

5. 有一邊長為 2 的正四面體 $ABCD$ ，設 A' 為 A 對平面 BCD 的對稱點， B' 為 B 對平面 ACD 的對稱點，試求出四面體 $A'CB'D$ 的體積為何？

正確答案： $\frac{10\sqrt{2}}{27}$

<背面有題>

6. 重複操作一個成功機率為 p 的伯努力試驗，且 $S_n = \sum_{k=1}^n k^2(1-p)^k$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 180$ ，試求到第三次才出現第一次成功的機率。

正確答案: $\frac{16}{125}$

7. 設函數 $f(x) = |\log x|$ ，若 $a \neq b$ ，且 $f(a) = \frac{1}{2}f(b) = f(\frac{a+b}{2})$ ，求數對 $(a, b) = ?$

正確答案: $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+3}{2})$

8. 曲線 $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ ， $(0 < a < 4)$ ，試回答下列問題。

(1) 試證 $f(x) = 0$ 在 $0 < x < 2$ 之間恰有一實根 t 。(3 分)

正確答案: 略

(2) 三直線 $x = 0$ ， $x = 2$ ， $y = 0$ 與曲線 $y = f(x)$ 所圍成區域的面積為 S ，試以 t 表示。(3 分)

正確答案: $-\frac{3}{2}t^4 + 6t^3 - 6t^2 + 4 (0 < t < 2)$

(3) 試求當 t 為多少時 S 有最小值，並求出 S 的最小值。(4 分)

正確答案: $\frac{5}{2}$

9. 若數列 $\langle a_n \rangle$ 中每一項均為正數，設數列 $\langle a_n \rangle$ 之前項 n 的和為 S_n 。已知 $\sum_{k=1}^n \frac{4S_k}{a_k + 2} = S_n$ ，試求 a_n 及

S_n (皆以 n 的式子表示)。

正確答案: $a_n = 2n (n \in N), S_n = n^2 + n$

10. 在坐標平面上，已知 \vec{a} ， \vec{b} ， \vec{c} 為三個非零向量，其中 $|\vec{a}| = 4$ ， $|\vec{b}| = 6$ ， \vec{a} 在 \vec{b} 上的正射影長為 1，若 $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$ ，試求 $|\vec{c}|$ 的最大可能值。

正確答案: $4 + \sqrt{10}$

<試題結束>