臺中市立臺中第二高級中等學校

114 學年度　第 1 次教師甄選　數學科 試題

計 2 張 3 面

一、填充題：每格 5 分，共 10 格，合計 50 分

1. 設 $x\in R$，求 $f(x)=\sqrt{x^4-x^2-6x+10}-\sqrt{x^4-3x^2+4}$ 的最大值為______。

2. 第一次段考英文考題包含選擇題與寫作題兩部分，某班學生英文選擇題分數 (X) 之標準差為 $\sigma_X=10$；寫作題分數 (Y) 之標準差為 $\sigma_Y=3$；兩部分分數相加後之英文成績 $(X+Y)$ 的標準差為 $\sigma_{X+Y}=12$。試求選擇題分數 (X) 與寫作題分數 (Y) 相關係數為______。(答案以最簡分數表示)

3. 由 $1,2,3,\cdots,12$ 十二個數字中隨機取出四個相異的數，每個數被取出的機會皆相等，令 S 表示此四數的乘積，求 S 為完全平方數的機率為______。

4. 袋中有 5 張紙牌，其中有 2 張標記為「5 點」，另外 3 張標記為「4 點」，今從袋中隨機取出 2 張紙牌，若 2 張紙牌點數不同，則結束取牌；若 2 張紙牌點數相同，則將紙牌放回，並繼續取牌，直到 2 張紙牌點數不同，則結束取牌。試問取出紙牌之點數總和的期望值為______。

5. 平面上，有一個四邊形 $ABCD$ 內接於圓Γ，$\overline{AC}$ 為圓Γ的直徑、O 點為圓Γ的圓心。已知$\overline{AB}=4\sqrt{5}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=11$ 且ΔOAB的面積:ΔOAD的面積$=16:7$，設$\overrightarrow{AC}=r\,\overrightarrow{AB}+s\,\overrightarrow{AD}$，求數對$(r,\,s)=$________。

6. 空間中，有一個邊長為 3 的正立方體，此正立方體在某平面 E 的投影為正六邊形，求此正六邊形的面積為________。

7. 求滿足$(a+bi)^{2002}=a-bi$ 的實數數對(a,b)有________組。

8. 已知 $f(x)=x^2+6x+1$，令符合兩條件 $f(x)+f(y)\le 0$ 與 $f(x)-f(y)\le 0$之點(x,y)所成的集合為R，則區域R 的面積為________。

9. ΔABC 中，角 A,B,C 所對的邊分別為a,b,c，其中$b\ge a$，若$2a\cos(B+C)+c\cos B+b\cos C=0$，且$\Delta ABC$外接圓半徑為 2，求$2b-c$取值範圍為________。

10. 計算$\sum_{k=1}^{2025}\frac{2^{-k}+1}{2^{-2k}-2^{-k+1}+2^{k+1}-1}=$________。

二、計算證明題：每題 10 分，共 5 題，合計 50 分

A. 設 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-x)(x+x^{2n})}{1+x^{2n}}$，求 $\int_0^2 f(x)\,dx=?$

B. 設 A、B、C 是橢圓 $\Gamma:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{32}=1$ 上三點，且 ΔABC 的重心恰為此橢圓的中心，已知 $A(\sqrt{6}+\sqrt{2},\ 2\sqrt{3}-2)$，

求 ΔABC 的面積為何?

C. 坐標平面上，若四邊形的四個頂點都在函數 $f(x)$ 上，則稱此四邊形為 $f(x)$ 的內接四邊形。已知函數

$f(x)=x^3+ax$ 的圖形有唯一一個內接正方形，求 a 之值為何?

D. 已知一銳角三角形△ABC之邊長分別為 a,b,c。

令 r 為△ABC內切圓之半徑，R 為△ABC外接圓之半徑，

試證：(1) $r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ (5 分)

(2) $\dfrac{abc}{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}\geq\dfrac{r}{2R}$ (5 分)

E. 用 $|S|$ 表示集合 S 中元素的個數。已知集合 $S=\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\cdots,\dfrac{1}{113}\right\}$，$T=\left\{A\subseteq S \,\middle|\, |A|=2n, n\in N\right\}$，試回答下列問題:

(1) $|T|=?$

(2) $\forall A_i\in T$，將 A_i 中所有的元素相乘的乘積記為 m_i，再將所有的 m_i 相加，其和為 M，求 M 之值?