

臺北市立第一女子高級中學 114 學年度第一次正式教師甄選數學科筆試試題卷

准考證號碼：_____ 姓名：_____

※ 注意：請務必於上欄填寫「准考證號碼」及「姓名」

一、填充題(每格 7 分，共 56 分)

1. 已知 $[x]$ 為不大於 x 之最大整數，若 $\sum_{k=1}^n [\log_{45} k] = 2000$ ，則 $n =$ _____。
2. 坐標平面上 $O(0,0)$ 、 $A(a,20)$ 、 $B(b,25)$ 為一個正三角形的三個頂點，則 $ab =$ _____。
3. 小綠投擲兩個公正的骰子，其中一個骰子 A 是正六面體，點數分別為 2,3,4,5,6,7；
另外一個骰子 B 是正八面體，點數分別為 2,3,4,5,6,7,8,9。記錄骰子 A 的點數為 a ，
骰子 B 的點數為 b ，若第 X 次投擲時，首次滿足 $\log_a b$ 為正整數，則 X 的期望值為 _____。
4. 正四面體 $ABCD$ 的稜長為 5，現分別在 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{AD} 上各取一點 P 、 Q 、 R 。
若 $\overline{AR} = 2$ ，且 \overline{AD} 與平面 PQR 垂直，則五面體 $PQR-BCD$ 的體積為 _____。
5. 設 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{2n^2 + 3kn + k^2}$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____。
6. 阿綠冒險時得到兩個尚未開啟的神奇寶箱，這些寶箱機緣到了，就會自動開啟，
否則就會維持關閉狀態；而寶箱一旦開啟，就會一直維持開啟狀態。
已知對每一個寶箱而言，如果今天沒有開啟，則隔天會開啟的機率為 $\frac{1}{3}$ 。
若在阿綠得到寶箱的 X 天之後，首次出現兩個寶箱都是開啟狀態，則 X 的期望值為 _____。
(註：阿綠得到寶箱的那一天，寶箱不會開啟。)
7. 已知梯形 $ABCD$ 內接於一圓，其中 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 。過 D 點作圓的切線交直線 AC 於 E 點，
若 $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ，且 $\overline{AD} = 8$ 、 $\overline{AB} = 4$ ，則 $\overline{CE} =$ _____。
8. 已知 a 為正整數，若方程式 $(z^2 - 2z + 5)(z^2 - 2az + 1) = 0$ 有四個兩兩相異的根，
且它們在複數平面上對應的四個點恰好共圓，則 $a =$ _____。

二、計算證明題(共 74 分，須寫出計算過程，否則不予計分)

1. 小綠與小青在高三複習二階方陣時，各有推論計算過程如下：

$$\begin{array}{l} \text{小綠： } A^2 = I \Rightarrow A^2 = I^2 \Rightarrow A = I \vee A = -I \\ \text{小青： } B^2 = B \Rightarrow B = I \vee B = O \end{array}$$

其中 A 、 B 為二階方陣， I 為單位矩陣、 O 為零矩陣。

請問以上推論過程哪裡有錯？又如何向小綠與小青說明呢？(本題 12 分)

2. 數學老師在黑板上出了兩道題目：

- (1) 平面上 n 條直線，最多將此平面分成幾個不同區域？
- (2) 空間中 n 個平面，最多將此空間分成幾個不同區域？

小綠的推論如下：

(1) 設平面上 n 條直線最多將此平面分成 a_n 個不同區域，

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 4 = a_1 + 2$$

$$a_3 = 7 = a_2 + 3$$

$$\vdots$$

$$\therefore a_n = a_{n-1} + n = n + a_{n-2} + (n-1) = n + (n-1) + a_{n-3} + (n-2) = \cdots$$

$$= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 2 = \frac{1}{2}n(n+1) + 1 = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

(2) 設空間中 n 個平面最多將此空間分成 b_n 個不同區域，

$$b_1 = 2$$

$$b_2 = 4 = 2b_1$$

$$b_3 = 8 = 2b_2$$

$$\vdots$$

$$\therefore b_n = 2b_{n-1} = 2 \times 2b_{n-2} = 2 \times 2 \times 2b_{n-3} = \cdots = 2^n$$

請問小綠的推論結果正確嗎？若錯誤，請說明並更正。(本題 12 分)

3. 有一矩形牆面由 18 個相同的正方形部分組成，牆面為 3 個正方形寬、6 個正方形高。

今欲將矩形牆面的其中 9 個正方形塗成黑色，另外 9 個正方形塗成白色，並滿足

「整個牆面的任兩個橫列的塗色方式均不同」，請問共有多少種塗色方式？(本題 12 分)

4. 有一款遊戲不定期推出促銷抽獎活動，在促銷時段遊戲公司宣稱玩家抽中大獎的機率是 10%。

設隨機變數 X 為首次抽中大獎的所需抽獎次數，小綠在促銷時段抽獎，直到第 22 次時才首次

抽中大獎，請以顯著水準 $\alpha = 0.1$ 計算抽獎次數 X 的拒絕域為何？

並判斷小綠可否據此拒絕承認「遊戲公司宣稱的大獎機率是 10%」的假設？(本題 12 分)

參考數據如下表：

n	$(0.9)^n$	n	$(0.9)^n$	n	$(0.9)^n$
1	0.900000	11	0.313811	21	0.109419
2	0.810000	12	0.282430	22	0.098477
3	0.729000	13	0.254187	23	0.088629
4	0.656100	14	0.228768	24	0.079766
5	0.590490	15	0.205891	25	0.071790
6	0.531441	16	0.185302	26	0.064611
7	0.478297	17	0.166772	27	0.058150
8	0.430467	18	0.150095	28	0.052335
9	0.387420	19	0.135085	29	0.047101
10	0.348678	20	0.121577	30	0.042391

5. 已知斜率為 m 的直線 L 通過原點。若 L 與 $y = -x^2 + 2x + 3$ 的圖形所圍出的封閉區域面積為 S ，

且 L 與 $y = -x^2 + 6x + 7$ 的圖形所圍出的封閉區域面積也是為 S ，試求 m 與 S 之值。(本題 13 分)

6. 已知雙曲線 Γ 的兩漸近線分別為 x 軸和直線 $24x - 7y = 0$ ，且點 $(1, 2)$ 在 Γ 上，

試求雙曲線 Γ 的貫軸長。(本題 13 分)