張進通許世賢教育文教基金會111學年度雲嘉南區國中數學能力競試

「數學一」試題

一、填充題：每題5分，共75分。請在答案卷上作答。

1. 設三位正整數 n 與 36 的最大公因數為 12，試求所有可能 n 的個數為_________。

2. 設 S_n 為等差數列前 n 項之和($n>8$)，若 $S_8=48$ ， $S_n=220$ ， $S_{n-8}=92$ ，求 $n=$_________。

3. 分別調查嘉義高中學生 3C 產品使用狀況，發現其中 85%的學生有手機，80%的學生有平板，75%的學生有無線耳機，70%的學生有筆電，請問其中手機、平板、無線耳機、筆電都有的學生至少占_________%。

4. 若 a 為實數，滿足 $a^5+a+1=0$ ，則 $a^3-a^2=$_________。

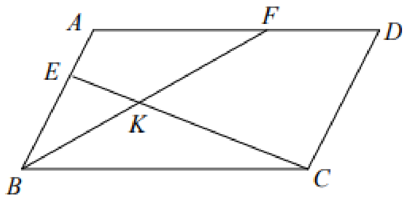
5. 請利用 $\left(\sqrt{8}+\sqrt{5}\right)^4+\left(\sqrt{8}-\sqrt{5}\right)^4=658$ ，求大於 $\dfrac{1}{\left(\sqrt{8}-\sqrt{5}\right)^4}$ 之最小正整數為_________。

6. 化簡 $\sqrt{\sqrt{48}-\sqrt{45}}=\dfrac{\sqrt[4]{A}-\sqrt[4]{B}}{C}$ ，其中 $C<4$，則正整數數對 $(A,B,C)=$_________。

7. 設 x 為一實數，高斯符號 $[x]$ 表不大於 x 的最大整數，例： $[4.2]=4$ ， $[-3.5]=-4$ ，

   試求 $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\left[\sqrt{4}\right]+\cdots+\left[\sqrt{111}\right]=$_________。

8. 如右圖，若平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AE}:\overline{BE}=1:3$ ， $\overline{AF}:\overline{DF}=4:3$ ， $\overline{BF}$ 與 $\overline{CE}$ 相交於 K，則 $\dfrac{\overline{CK}}{\overline{EK}}=$_________。



9. $\sqrt{4444488889}=$_________。(答案為一正整數)

10. 解方程式 $-5\left(-5x^2+1\right)^2+1=x$ ：_________。

11. 若三正數 a,b,c，滿足 $a^2+b^2+c^2=1$，求 $\dfrac{8-5ab}{c}$ 的最小值為_________。

12. 已知 $a+b+c=2022$ ， $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2022}$ ，試求 $\dfrac{1}{a^{111}}+\dfrac{1}{b^{111}}+\dfrac{1}{c^{111}}=$_________。

13. 試求滿足 $2^a-7\times 2^b+2^c=2022$ ，$a>c$ 之正整數解 $(a,b,c)=$_________。

14. 設 x 為一實數，高斯符號 $[x]$ 表不大於 x 的最大整數，解方程式 $\left[x^2\right]+[2x]+[x]=x+\dfrac{1}{2}$：________。

15. 已知級數和公式，n 為正整數：

$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$，$\cdots$

事實上，$1^m+2^m+3^m+\cdots n^m$ (m 為正整數)總和公式，可以由 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 慢慢推得，以下觀察 m=1,2,3：

總和 \ k	1	2	3	4	$\cdots$	n
$a=1+2+3+\cdots+k$	1	3	6	10	$\cdots$	$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$
$b=1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2$	1	5	14	30	$\cdots$	$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$
$c=1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3$	1	9	36	100	$\cdots$	$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

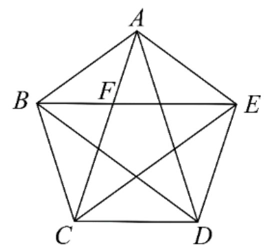
觀察 a 與 b,c 的關係

b/a	$\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\cdots$	$\Rightarrow \dfrac{2n+1}{3}$	$\Rightarrow b=a\times\dfrac{2n+1}{3}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
c/a	1	3	6	10	$\cdots$	$\Rightarrow \dfrac{n(n+1)}{2}$	$\Rightarrow c=a\times\dfrac{n(n+1)}{2}=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

但從 m= 4 開始，要由關係推得就變得不容易，試試用你可以的方式解出以下公式：

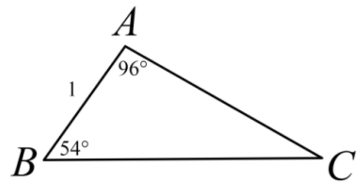
$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\dfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)\left(pn^2+qn+r\right)$，試求 $(p,q,r)=$________。

二、計算證明題：兩大題，共 25 分。過程及答案請寫在答案卷上。

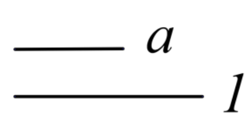


1. (1) 如右圖，邊長為 1 的正五邊形 $ABCDE$ 中，F 為對角線 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BE}$ 交點，試求 $\overline{BF}$。(5 分)

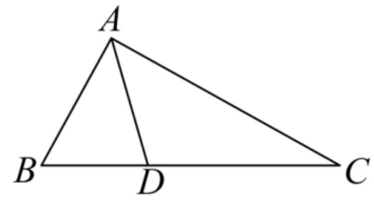
(2) ΔABC 中，$\overline{AB}=1$，$\angle ABC=54^\circ$，$\angle BAC=96^\circ$，試求 $\overline{AC}$。(5 分)



2. (1) 如右圖，給定兩線段分別長 a 及 1，請利用尺規作圖作出 $\dfrac{1}{a}$，並簡述你的做法。(5 分)



(2) 如右圖，ΔABC 中，$\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$，試證 $\overline{AD}^2=\overline{AB}\times\overline{AC}-\overline{BD}\times\overline{CD}$。(5 分)



(3) 如右圖，正三角形 ΔABC 邊長為 1，$\overline{CD}$、$\overline{CE}$ 將 $\angle ACB$ 三等分，$\overline{DB}=a$，$\overline{DC}=b$，

試求 $\dfrac{1}{a}-b$。(5 分)