

# 臺北市立松山高級工農職業學校 106 學年度第 1 次教師甄選

## 【數學科】初試試題

作答說明：

1. 請在答案卷上標明題號依序作答。
2. 全卷限用藍色或黑色單一顏色筆作答。
3. 作答時間 90 分鐘。
4. 交卷時請將試題卷與答案卷一併繳交。

一、填充題(不需要寫算式，每題 5 分)

1. 設  $a, b$  為實數， $f(x)$  為 5 次實係數多項式且其最高次項係數為  $a$ 。

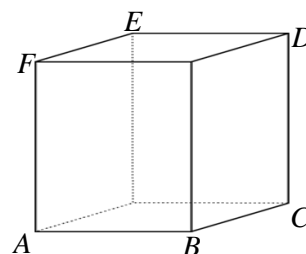
若  $f(x)$  滿足  $\int_b^x f(t)dt = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 10)^3 - \frac{1}{2}$ ，則數對  $(a, b) =$  \_\_\_\_\_？

2. 若  $n = 2017^{2017}$ ，則  $n$  除以 11 的餘數為\_\_\_\_\_？

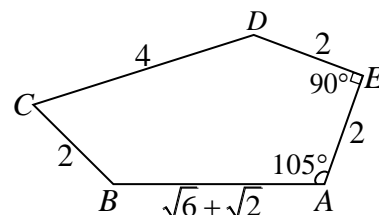
3. 假設袋中有 15 顆球，其中 4 顆紅球、1 顆白球、10 顆黃球。規定一次只能抽一球且不放回去，現在依甲先乙後的順序分別抽球一次，但當抽到的球是白球時，則須馬上再補抽一球，問甲有抽中紅球且乙也有抽中紅球的機率為\_\_\_\_\_？

4. 設  $a, b, c$  為正實數，求  $\frac{2b-2c}{a+b+2c} + \frac{2a+4c}{a+2b+c} + \frac{b}{a+b+c}$  的最小值\_\_\_\_\_？

5. 在右圖的正立方體上有三質點分別自頂點  $A, C, E$  同時出發，各自以等速直線運動分別向頂點  $B, D, F$  前進，且在 1 秒後分別同時到達  $B, D, F$ 。則三質點運動時所構成的三角形其最小面積為\_\_\_\_\_？



6. 最近數學家發現一種新的可以無縫密鋪平面的凸五邊形  $ABCDE$ ，其示意圖如右，則凸五邊形  $ABCDE$  面積為\_\_\_\_\_？



7. 已知平面上四點坐標為  $A(57, 23)$ 、 $B(7, -2)$ 、 $C(5, 12)$ 、 $D(x, y)$ 。若向量  $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ ，則  $D$  點坐標  $D(x, y) =$ \_\_\_\_\_？

8. 根式  $\sqrt{105\sqrt{104\sqrt{103\sqrt{102\sqrt{101\sqrt{100\times 98+1+1+1+1+1+1+1}}}}}$  之值為\_\_\_\_\_？

9. 若直線  $y = x$  與曲線  $y = x^3 - 3x^2 + ax$  相切，試求  $a =$ \_\_\_\_\_？

10. 在方程式  $z^{12} = 64$  中，一切有正實部之根的總和為何\_\_\_\_\_？

11. 有一個三角錐，其底面是一個邊長分別為 20, 20, 24 的三角形，底面三頂點到第四個頂點的稜長都是 25，則此三角錐的體積為\_\_\_\_\_？

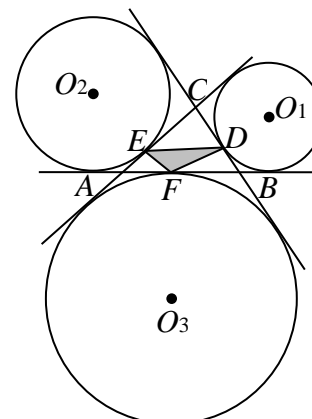
12. 坐標平面上的橢圓  $\Gamma: \frac{(x-8)^2}{121} + \frac{(y-15)^2}{100} = 1$  上有\_\_\_\_\_個點與原點的距離正好是整數值？

13. 設  $x_1 < x_2 < x_3$  為方程式  $\sqrt{2014}x^3 - 4029x^2 + 2 = 0$  的三個實數根，試求  $x_2(x_1 + x_3)$  之值\_\_\_\_\_。

14. 在坐標平面上，圓  $x^2 + y^2 = 2$  與  $\|x| - 1| + \|y| - 1| = 1$  的圖形有幾個交點\_\_\_\_\_？

15. 在  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = 6, \overline{BC} = 4, \overline{CA} = 5$ ，圓  $O_1, O_2, O_3$  為  $\triangle ABC$  的三個旁切圓，圓  $O_1$  和  $\overline{BC}$  相切於  $D$ ，圓  $O_2$  和  $\overline{CA}$  相切於  $E$ ，圓  $O_3$  和  $\overline{AB}$  相切於  $F$ 。

試求  $\frac{\triangle DEF \text{面積}}{\triangle ABC \text{面積}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ？



## 二、問答題(每題 5 分)

以下是本校學生解題時常犯的錯誤，(1)請寫出錯誤之處及正確觀念為何？(2分)(2)寫出正確答案(3分，不需要寫算式)。

1. 解指數方程式  $2^{(x^2-1)} = 5^{(x+1)}$ ，則  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ？

甲同學的算式為：

$$2^0 = 1 = 5^0, \text{ 得到 } x = -1$$

2. 設有四筆資料如下：

$x$	1	2	4	5
$y$	2	$a$	$b$	5

若  $y$  對  $x$  之迴歸直線方程式為  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ，則數對  $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ ？

乙同學的算式為：

$$(2, a), (4, b) \text{ 落在迴歸直線上，代入得到 } a = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}, b = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\text{數對 } (a, b) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

3. 已知  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ，求  $(AB)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ ？

丙同學的算式為：

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 12 個相同物品分給甲、乙、丙、丁四人，若甲最多拿 8 個物品，則有幾種分法？

丁同學的算式為：

先把 4 個物品分給乙、丙、丁三人，再把剩下的 8 個物品分給甲、乙、丙、丁四人。

$$H(3, 4) \times H(4, 8) = 15 \times 165 = 2475 \text{ 種}$$

5. 求  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x} = \underline{\hspace{2cm}}$ ？

戊同學的算式為：

函數  $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos x}$  在  $x = \frac{\pi}{2}$  處沒有定義，故  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x}$  不存在。