臺中市立臺中第一高級中等學校 106 學年度第 1 次教師甄選數學科試題卷

說明：答案請寫在答案卷上，計算證明題請詳列過程。

壹、填充題 A 部分(第 **1** 題至第 **6** 題，每題 **5** 分，共 30 分)

1、設$a_n=\dfrac{2}{n}\left\{\left(2^2+1\right)+\left[\left(2+\dfrac{2}{n}\right)^2+1\right]+\left[\left(2+\dfrac{4}{n}\right)^2+1\right]+\ldots+\left[\left(2+\dfrac{2n-2}{n}\right)^2+1\right]\right\}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$__________。

2、設 $f(x)=ax+b$ ，其中 a，b 為實數， $f_1(x)=f(x)$ ， $f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$ ，$\forall n\in N$ 。若 $f_7(x)=128x+381$ ，則$a+b=$__________。

3、若 $f(x)=x^3-x$ ，自點 $P(2,a)$ 可對 $y=f(x)$ 作三條相異切線，則實數 a 的範圍為__________。

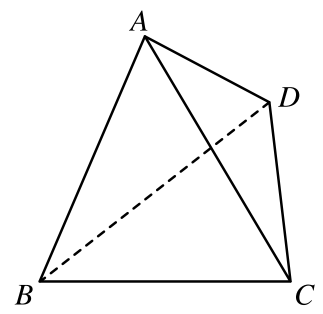
4、設 $\overline{AB}$ 為拋物線 $y^2=4x$ 的一弦，O 為原點，且 $\overline{AO}\perp\overline{BO}$ ，求$\triangle OAB$ 面積的最小值為__________。

5、設 z 為複數，且滿足 $Arg(z+3i)=40^\circ$， $Arg(z-3i)=310^\circ$ ，求$|z|=$__________。

6、如右圖，在四面體 $A-BCD$ 中，若 $\overline{AB}=1$，$\overline{CD}=\sqrt{3}$ ，$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 的距離為 2，

且 $\overrightarrow{BA}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 之夾角為 $\dfrac{\pi}{3}$ ，

則四面體 $A-BCD$ 的體積為__________。

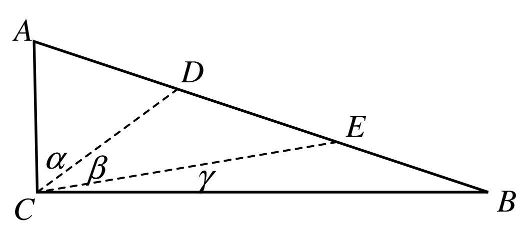


填充題 B 部分(第 **7** 題至第 **11** 題，每題 **8** 分，共 40 分)

7、若 $f(x)=x^{17}+4x^3-3x+1$ ，則$f(x)$ 除以 (x^4-x^3+x-1) 的餘式為__________。

8、如右圖，直角$\triangle ABC$ 的斜邊為$\overline{AB}$ ，若$\overline{AC}=1$ ， $\overline{BC}=3$， $\overline{AB}$ 的三等分點為 D、E，且 $\angle ACD=\alpha$ ， $\angle DCE=\beta$ ， $\angle ECB=\gamma$ 。

則$\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}=$__________。



9、若$(1+x+x^2)^{1000}$的展開式為$\sum_{k=0}^{2000} a_k x^k$ ，則$\sum_{k=0}^{666} a_{3k}$ 之值為__________位數。($\log 3 \approx 0.4771$)

10、已知$n \in N$, 當 $\frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}$ 時，函數$f(x) = a_n x^n$ 且 $a_1 = 1$ 。 若 $f(x)$在區間(0,1]上為連續函數 ，則$a_n =$____________。(以 n 表示)

11、如果自然數a的各位數字之和等於 7，那麼稱a為"吉祥數"。將所有"吉祥數"從小到大排成一列如$a_1, a_2, a_3, \cdots$，若$a_n = 2005$ ，則$a_{5n} =$______________。

貳、計算證明題(共 3 題，每題 **10** 分，共 30 分。須詳列過程)

一、有一種過關遊戲規定：在第 n 關要拋擲一顆公正骰子 n 次，如果這 n 次拋擲所出現的點數總和大於2^n ，就算過關。則：

(1)某人在這項遊戲中最多能過幾關？(4 分)

(2)他連過前三關的機率是多少？(6 分)

二、設$\{a_n\}$為等差數列，$\{b_n\}$為等比數列，且$b_1 = a_1^2$ ，$b_2 = a_2^2$ ，$b_3 = a_3^2$ ，$a_1 < a_2$ ，又$\lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \sqrt{2} + 1$ 。

試求數列$\{a_n\}$的(1)首項a_1 (5 分)

(2)公差 (5 分)

三、已知 $0 \le x \le 1$, $n \in N$ 。試證明：$0 \le x^n - x^{n+1} \le \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ 。(10 分)