

# 新北市立國民中學 105 學年度教師聯合甄選試題

科目：數學 科

## — 考生作答說明 —

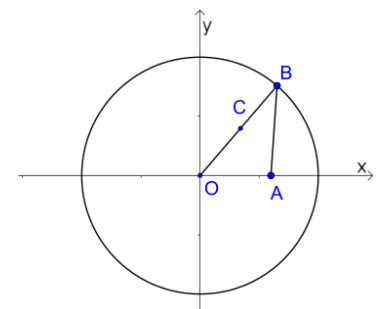
- 一、 請核對答案卡科目、准考證號碼是否與准考證內容相符，如果不符，請立即向監試人員反應。
- 二、 題目如涉及計算，禁止使用電子計算功能設備運算。
- 三、 請使用 2B 鉛筆於「答案卡」上畫記作答，切勿使用修正液(帶)，以免無法判讀。
- 四、 答案卡與試卷須一起繳交，方可離開試場。
- 五、 請務必填上准考證號碼。

准考證號碼：\_\_\_\_\_

科目：數學科

選擇題：共 40 題，每題 2.5 分，總分 100 分。

- (D) 1. 已知二次函數  $f(x)$  滿足  $f(2)=5$ ， $f(3)=8$ ， $f(4)=37$ ，則  $f(9)-2f(8)+f(7)=?$   
(A) 9 (B) 10 (C) 18 (D) 26
- (C) 2. 哥哥原來的存款比弟弟多，於是哥哥將他的錢分給弟弟，哥哥先給弟弟原有的錢數；結果弟弟發現哥哥現在的錢反而比他少，於是弟弟將他的錢再分給哥哥，他再分給哥哥現在錢數，結果兩人各有 300 元，試問哥哥原有多少元？  
(A) 325 元 (B) 350 元 (C) 375 元 (D) 400 元
- (A) 3. 某班第一次隨堂測驗全班數學平均成績為 55 分，且最高分者與最低分者相差 50 分，於是老師用線型函數調整成績。調整成績後，全班數學平均成績為 60 分，最高分者與最低分者相差 50 分，且最高分者為 100 分。試問調整成績前，最高分者原來成績是幾分？  
(A) 95 分 (B) 94 分 (C) 93 分 (D) 92 分
- (A) 4. 設  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  為實數，若直線  $y=ax+b$  與曲線  $y=x^2+cx+d$  有一相交點  $(2,2)$ ，試求通過  $(a,b)$  與  $(c+2,d)$  兩點的直線方程式為何？  
(A)  $2x+y=2$  (B)  $x+2y=2$  (C)  $2x+y=6$  (D)  $x+2y=6$
- (A) 5. 中山國中 3 年 2 班師生與部分家長共 48 人參加畢業旅行，投宿於某旅館。已知此旅館一樓的客房比二樓的客房少 5 間，若全部都住在一樓的客房，每間住 4 人，則房間不夠；若每間住 5 人，則有的房間沒住滿。如果所有的學生住在二樓，每間住 3 人，則房間不夠；若每間住 4 人，則有的房間沒住滿。試問此旅館一樓共有幾間客房？  
(A) 10 間 (B) 11 間 (C) 12 間 (D) 13 間
- (B) 6. 在  $\triangle ABC$  中，且  $\overline{AB}=4$ 、 $\overline{AC}=6$ 、 $\angle A=60^\circ$ ，若點  $D$  為  $\triangle ABC$  的垂心，求  $\overline{AD}=?$   
(A)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  (B)  $\frac{2\sqrt{21}}{3}$  (C)  $\frac{5\sqrt{23}}{3}$  (D)  $\frac{11\sqrt{21}}{2}$
- (D) 7. 設  $x$  為實數， $\sin(\pi\sqrt{170-x^2})=-1$  解的個數為何？  
(A) 2 (B) 6 (C) 10 (D) 12
- (D) 8. 某貿易公司的人員全部參加英語、日語、數學及會計能力檢定考試，成績統計出以下現象：  
(一) 英語檢定合格的人，日語檢定亦合格；  
(二) 每個人英語、數學中至少有一科檢定合格；  
(三) 會計檢定不合格的人數小於數學檢定不合格的人數。  
根據上述資料，試問下列哪一選項必定是正確的？  
(A) 英語檢定合格的人數大於日語檢定合格的人數  
(B) 沒有人英語、數學檢定同時合格  
(C) 會計檢定合格的人數不大於數學檢定合格的人數  
(D) 數學檢定合格的人數加上日語檢定合格的人數不少於此公司的總人數
- (D) 9. 如圖(一)所示，圓  $O$  的半徑為 5，點  $A$  坐標為  $(3,0)$ ，點  $B$  為圓  $O$  上一點，點  $C$  為線段  $\overline{AB}$  的中垂線和線段  $\overline{OB}$  的交點。當點  $B$  在圓  $O$  上移動時，試求動點  $C$  的軌跡方程式。  
(A)  $\frac{(x-1.5)^2}{25} + \frac{y^2}{25} = \frac{1}{4}$  (B)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = \frac{1}{4}$   
(C)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{8} = \frac{1}{4}$  (D)  $\frac{(x-1.5)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = \frac{1}{4}$



圖(一)

(B) 11. 已知某二元一次方程組可以寫成矩陣的等式  $(A-2I)X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ，其中  $A$  為  $2 \times 2$  方陣； $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ，而  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

若此方程組有唯一的解  $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，則下列哪一選項是不正確的？

(A) 方陣  $A$  的行列式之值可能等於 4 (B) 若  $A-2I$  的反矩陣為  $B$ ，則  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} B$

(C) 方程組  $AX = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$  必定有解 (D) 方程組  $AX = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  可能無解

(C) 12. 不大於 50 的正整數  $n$  中，有多少個正整數  $n$  使得  $2^n - n^2$  為 7 的倍數？

(A) 20 (B) 18 (C) 16 (D) 10

(B) 13. 某直角三角形的三邊長分別為  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，其中  $c$  為斜邊長。若  $\frac{a+b+c}{a+c} = \sqrt{2}$ ，且此三角形的面積為 2，則此三角形的周長為多少？

(A)  $4 + \sqrt{6}$  (B)  $4 + 2\sqrt{2}$  (C)  $4 + 2\sqrt{6}$  (D)  $5 + 3\sqrt{2}$

(A) 14. 當  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為實數，且方程組  $\begin{cases} x+6y-z=a \\ 2x-3y+5z=b \\ -3x+12y-11z=c \end{cases}$  有解時，實數  $a$ 、 $b$ 、 $c$  就必須滿足  $a = pb + qc$  的關係，

那麼，數對  $(p, q)$  應為下列哪一選項？

(A)  $(2, 1)$  (B)  $(-2, 1)$  (C)  $(\frac{2}{7}, \frac{-1}{7})$  (D)  $(\frac{-2}{7}, \frac{1}{7})$

(A) 15. 已知等腰三角形  $ABC$  的外接圓半徑為 15，其底邊  $\overline{BC} = 24$ ，若  $\triangle ABC$  的面積可能為  $a$  或  $b$ ，且  $a > b$ ，則  $a - b = ?$

(A) 216 (B) 200 (C) 105 (D) 72

(A) 16. 整數  $4^{10}$  的所有正因數的乘積為何？

(A)  $4^{105}$  (B)  $4^{110}$  (C)  $4^{155}$  (D)  $4^{210}$

(D) 17. 若在  $\triangle ABC$  中  $\angle A$  與  $\angle B$  滿足  $3\sin A + 4\cos B = 6$ ， $4\sin B + 3\cos A = 1$ ，則  $\angle C = ?$

(A)  $\frac{5\pi}{6}$  (B)  $\frac{2\pi}{3}$  (C)  $\frac{\pi}{3}$  (D)  $\frac{\pi}{6}$

(D) 18. 若第一象限的整數點  $(m, n)$  在拋物線  $y = 19x^2 - 98x$  上，則  $m + n$  的最小值為何？

(A) 99 (B) 100 (C) 101 (D) 102

(B) 19. 設空間三平面  $E_1: x + 2y + 3z = 1$ ， $E_2: x - z = 1$  與  $E_3: 2y + 4z = a$  相交，試求實數  $a$  的值。

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

(D) 20. 坐標空間中，若圓  $O$  是  $xy$  平面上以原點  $(0, 0, 0)$  為圓心、2 為半徑的圓，則點  $P(12, 5, 8)$  與圓  $O$  上任意點之距離的最大值為何？

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17

(D) 21. 在  $\triangle ABC$  中， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  的對邊分別為  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 。若  $a = 5$ ， $b = 4$ ，且  $c = 6$ ，則  $\cos(\angle A - \angle B) = ?$

(A)  $\frac{1}{6}$  (B)  $\frac{5}{6}$  (C)  $\frac{31}{30}$  (D)  $\frac{31}{32}$

(C) 22. 已知大於或等於正整數  $n$  的整數都可以表示成  $5a + 14b + 21c$  的形式，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為正整數，則  $n$  的最小值為何？

(A) 73 (B) 75 (C) 78 (D) 81

(B) 23. 擲一公正的硬幣 3 次，約定如下：

(一)出現 3 次正面可得獎金 2000 元，出現 2 次正面 1 次反面可得獎金 480 元；

(二)出現 3 次反面須賠償 960 元，出現 1 次正面 2 次反面須賠償 240 元。

則擲此硬幣 3 次可得獎金的數学期望值為何？

- (A) 214 (B) 220 (C) 228 (D) 236

(C) 24. 下列哪一函數圖形與  $y=10^x$  的圖形經過平移或對稱後可以完全疊合(即圖形全等)？

- (A)  $y=100^x$  (B)  $y=\frac{1}{2}\log x^2$  (C)  $y=\log\frac{2}{x}$  (D)  $y=\log_2(x+2)$

(C) 25. 設  $a>b>c$  均為實數且滿足  $a+b+c=3$ ， $a^2+b^2+c^2=11$ ， $a^3+b^3+c^3=27$ ，則  $a+2b+3c$  之值為何？

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(B) 26. 設  $S$  是由 1 到 105 所有整數所形成的集合。考慮從  $S$  中取 3 個相異數恰為等差數列而組成的子集合，試問這樣的子集合共有多少個？

- (A) 2601 (B) 2704 (C) 2730 (D) 5460

(C) 27. 設有一半徑 5、球心  $O$  的球體，被一平面  $E$  截成大小兩塊立體。若球心  $O$  到平面  $E$  的距離為 3，則小塊立體與大塊立體的體積比為何？

- (A) 1:4 (B) 1:16 (C) 13:112 (D) 13:125

(D) 28. 小華去登山健行，他先從  $A$  點沿平地走路到達  $C$  點，開始爬山，翻越山頂  $D$  點，最後下山到達山腳  $B$  點，他再從原路折返回  $A$  點。已知去程( $A-C-D-B$ )他共費時 3 小時，回程( $B-D-C-A$ )他共費時 3 小時 10 分鐘，且從  $A$  點經  $C$  點、 $D$  點到達  $B$  點的總路長為 9 公里。若小華在平地每小時的平均速率為 4 公里，上山每小時的平均速率為 2 公里，下山每小時的平均速率為 3 公里，則平地  $A$  點到  $C$  點的距離為多少公里？

- (A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4

(D) 29. 圓內接四邊形  $ABCD$  中，若  $\angle A=105^\circ$ ， $\angle ABD=45^\circ$  且  $\angle CBD=60^\circ$ ，則  $\triangle ABD$  與  $\triangle BCD$  的面積比為何？

- (A)  $\sqrt{2}:\sqrt{3}$  (B)  $\sqrt{3}:2$  (C)  $1:\sqrt{2}$  (D)  $1:\sqrt{3}$

(C) 30. 若  $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+c\log(x+\sqrt{x^2+1})+4$  且  $f(\log(\log_3 10))=5$ ，則  $f(\log(\log 3))=?$

- (A) -2 (B) 1 (C) 3 (D) 隨  $a$ 、 $b$ 、 $c$  而定

(B) 31. 在坐標平面上， $O(0,0)$ 、 $A(7,0)$ 、 $B(0,5)$ ，點  $C$  在  $\overline{AB}$  上使得  $\overline{OC}\perp\overline{AB}$ ，點  $M$  為  $\overline{AB}$  的中點，則  $\overline{CM}=?$

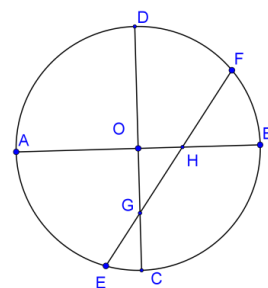
- (A)  $\sqrt{\frac{61}{31}}$  (B)  $\sqrt{\frac{72}{37}}$  (C)  $\sqrt{\frac{71}{37}}$  (D)  $\sqrt{\frac{59}{31}}$

(A) 32. 設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  均為實數， $i=\sqrt{-1}$ ， $f(x)=ix^4+ax^3+bx^2+x+1$ 。若  $f(i+1)=i$ ，則  $f(-2)$  之值為何？

- (A)  $-5+16i$  (B)  $5+16i$  (C)  $-5-16i$  (D)  $5-16i$

(B) 33. 設  $\overline{AB}$  和  $\overline{CD}$  為圓  $O$  的兩互相垂直的直徑，如圖(二)所示，若圓上一弦  $\overline{EF}$  分別交  $\overline{AB}$  和  $\overline{CD}$  於  $H$  點和  $G$  點，且  $\overline{EG}=2$ ， $\overline{GH}=3$ ， $\overline{FH}=3$ ，試求圓  $O$  的面積為何？

- (A)  $\frac{36\pi}{5}$  (B)  $18\pi$  (C)  $20\pi$  (D)  $\frac{80\pi}{3}$



圖(二)

(B) 34. 級數  $\sum_{n=2}^9 \left( \log_2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \log_3 \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right)$  的和最接近下列哪一個數？

(A) 3.82

(B) 4.32

(C) 4.82

(D) 5.32

(C) 35. 設  $x, y$  為滿足  $x^2 + y^2 = 25$  的實數，且  $(x, y) = (x_1, y_1)$  和  $(x, y) = (x_2, y_2)$  時分別使得  $3x + 4y$  有最大值  $M$  與最小值  $m$ ，若此兩點的距離為  $d$ ，試求  $M + m + d = ?$

(A) 5

(B) 9

(C) 10

(D) 25

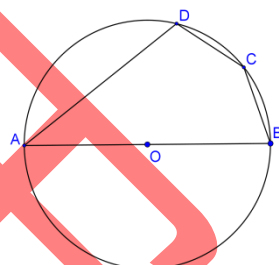
(B) 36. 設四邊形  $ABCD$  內接於一圓，如圖(三)所示，且  $\overline{AB}$  為此圓的直徑，若  $\overline{BC} = \overline{CD} = 3$  且  $\overline{AD} = 7$ ，試算  $\overline{BD}$  的長度為何？

(A) 4

(B)  $4\sqrt{2}$

(C)  $5\sqrt{3}$

(D)  $6\sqrt{2}$



圖(三)

(C) 37. 小明玩打飛機的電動遊戲，在螢幕上有一坐標平面，火箭砲台置於原點，飛機以等速直線飛行，火箭飛行的速率與飛機相同，遊戲規定遊戲者只能發射一枚火箭。設開始時飛機出現在坐標  $(-12, 4)$  的位置，經過 1 秒後飛機到達  $(-10, 4)$  的位置，再經過 1 秒後小明發射火箭，結果火箭恰好擊中飛機，請問飛機被擊中的坐標為何？

(A)  $(-5, 4)$

(B)  $(-4, 3)$

(C)  $(-3, 4)$

(D)  $(-2, 5)$

(A) 38. 設數列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  滿足  $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$  且  $a_2 = 1$ 。若此數列前 103 項的和為 2016，則此數列前 105 項的和為多少？

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(A) 39. 設方程式  $x^3 - x^2 - 2x + k = 0$  有兩根之和為 1，則  $k$  為多少？

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(C) 40. 設  $x, y$  為實數，且滿足  $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 4$ ，則  $xy$  最小值為何？

(A)  $18 - 6\sqrt{2}$

(B)  $18 - 7\sqrt{2}$

(C)  $18 - 8\sqrt{2}$

(D)  $18 - 9\sqrt{2}$