

臺南市 2015 年公私立國民中學數學競賽第二階段試題

注意事項

1、本試卷共三頁。

2、本試題共分兩部分，第一部分：第 1 到第 20 題，每題 3 分，共 60 分；第二部分：第 21 到第 30 題，每題 4 分，共 40 分；合計 30 題，總分 100 分。

第一部分（第 1 到第 20 題，每題 3 分，共 60 分）

1. 設 $a = 1.732$ ，則下列何者正確？

(A) $\sqrt{3} < \frac{3a+3}{a+3} < a$ (B) $a < \frac{3a+3}{a+3} < \sqrt{3}$

(C) $\sqrt{3} = a < \frac{3a+3}{a+3}$ (D) $\frac{3a+3}{a+3} < a < \sqrt{3}$

2. 已知 $a = \sqrt{3}$ ，計算 $\frac{a^2 - 2a - 3}{\sqrt{a^2 - 4a + 4}} \div \frac{a^2 - a - 6}{a - 2} - \frac{a^2 - 2a}{4 - a^2} = ?$

(A) $-2 + \sqrt{3}$ (B) $2 - \sqrt{3}$ (C) $-2 - \sqrt{3}$ (D) $2 + \sqrt{3}$

3. 計算 $6.25 + 24\frac{20}{23} - 5.5 + \frac{1}{4} + 15\frac{3}{23} + 8\frac{1}{2}$ 。

(A) 49.5 (B) 50 (C) 50.5 (D) 51

4. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BAC = 63^\circ$ ，又 D 為 \overline{BC} 上一點，使得 $\overline{BD} = \overline{DA} = \overline{AC}$ ，則 $\angle DAC$ 的角度為何？

(A) $(23\frac{2}{5})^\circ$ (B) 24° (C) 39° (D) $(39\frac{3}{5})^\circ$

5. 有兩組數，其中一組數共有 20 個，總和為 1264，而另一組數的平均數為 88，又這兩組數的總平均為 80，請問兩組合計共有多少個數？

(A) 42 (B) 54 (C) 62 (D) 64

6. 設 a, b 為相異正數，規定運算 $*$ 為 $a * b = \frac{a+b}{a-b}$ ，如果 $3 * n = 3$ 時，則 n 值為多少？

(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) 3

7. 已知一等差數列 $\{a_n\}$ ，它的第 5 項 $a_5 = 88$ ，第 8 項為 $a_8 = 79$ ，則使 a_n 為負數的最小正整數 n 值為多少？

(A) 34 (B) 35 (C) 36 (D) 37

8. 請問這 5 個數 $3\sqrt{11}, 4\sqrt{7}, 5\sqrt{5}, 6\sqrt{3}, 7\sqrt{2}$ 中有多少個數大於 10？

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

9. 已知 a 、 b 、 c 為三個連續的正偶數，且 $ab+bc=288$ ，求此三數之和。

- (A) 32 (B) 36 (C) 42 (D) 46

10. 已知 $ABCD$ 為一梯形， $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ ， $\angle CDA = \angle BAD = 90^\circ$ ， E 是 \overline{AD} 的中點，且 $\overline{EC} \perp \overline{BC}$ ，又 $\overline{DC} = 3$ ， $\overline{DE} = \overline{EA} = 4$ ，則 $\overline{AB} = ?$

- (A) 14 (B) $\frac{32}{3}$ (C) $\frac{41}{3}$ (D) 17

11. 設 x 和 y 均為自然數，已知 x 除以 24 餘數為 19， y 除以 36 餘數為 31，則 $x^{2014}y^{2015}$ 除以 6 之餘數為

- (A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5

12. 如果 a, b 為一元二次方程式 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的二個解，且 $a > b$ ，則 $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = ?$

- (A) $-3\sqrt{5}$ (B) $-\sqrt{5}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $3\sqrt{5}$

13. 設 $f(n)$ 表示正整數 n 之最大奇因數，例如 $f(3) = 3, f(10) = 5$ ，則 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(50) = ?$

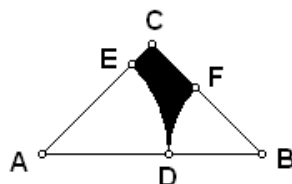
- (A) 842 (B) 843 (C) 844 (D) 845

14. 計算 $\sqrt{\underbrace{11 \dots 1}_{20 \text{ 個 } 1} - \underbrace{22 \dots 2}_{10 \text{ 個 } 2}} = ?$

- (A) $\underbrace{11 \dots 1}_{10 \text{ 個 } 1}$ (B) $\underbrace{22 \dots 2}_{10 \text{ 個 } 2}$ (C) $\underbrace{33 \dots 3}_{10 \text{ 個 } 3}$ (D) $\underbrace{99 \dots 9}_{10 \text{ 個 } 9}$

15. 等腰三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ，且 $\overline{AB} = 2$ ，以 A 為圓心，作一圓分別交 \overline{AB} 及 \overline{AC} 於 D 、 E 二點，使得 \overline{DE} 弧將 $\triangle ABC$ 分成面積相同的兩部分；又以 B 為圓心， \overline{BD} 為半徑作圓，交 \overline{BC} 於 F 點，則圖中陰影部分的面積為多少？

- (A) $\sqrt{\pi} - \frac{\pi}{2}$ (B) $\sqrt{\pi} - \frac{\pi}{4}$ (C) $\sqrt{\pi}$ (D) $\frac{1}{4}$



16. 設 n 為正整數，我們將 $1+2+3+\dots+n$ 的和稱為「第 n 個三角形數」，例如 1 、 $1+2=3$ 、 $1+2+3=6$ 分別是第一個、第二個、第三個三角形數，如果將第 n 個三角形數 $1+2+3+\dots+n$ 中的某一個數多加一次而得到 2015，試問此第 n 個三角形數之值為何？

- (A) 1952 (B) 1953 (C) 1954 (D) 1955

17. 直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ，且斜邊 $\overline{AB} = 35$ 。今在三邊 \overline{AB} 、 \overline{AC} 及 \overline{BC} 上分別取一點 E, D, F ，使得四邊形 $CDEF$ 為一正方形，且其邊長為 12，如圖所示。

則此直角三角形 ABC 長股之長為多少？

- (A) 15 (B) 21 (C) 28 (D) 32

18. 若 101 位數字 $\underbrace{99 \dots 99}_{50 \text{ 個 } 9} \square \underbrace{55 \dots 55}_{50 \text{ 個 } 5}$ 是 7 的倍數，則 \square 的所有可能值之和為

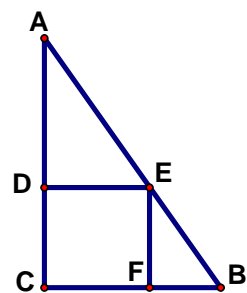
- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12

19. 化簡 $\sqrt{7+2(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}$ 為 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ 的形式，則 xyz 是多少？

- (A) 15 (B) 35 (C) 105 (D) 225

20. 若 $x + \frac{1}{x} = 5$ ，則 $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = ?$

- (A) $\frac{1}{24}$ (B) 24 (C) $\frac{1}{26}$ (D) 26



第二部分（第 21 到第 30 題，每題 4 分，共 40 分）

21. $ABCD$ 為一梯形， $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{BD} = \overline{BA}$ 又 $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ ，且 $\overline{AC} = \overline{BC}$ ，則 $\angle BAD$ 角度為何？

- (A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 75°

22. 假設 a 為一個正數，且 a 的純小數部分為 b ，也就是說 $0 \leq b < 1$ （例如：3.14159 的小數部分為 0.14159）；已知 $a^2 - b^2 = 70$ ，則 a 的值為多少？

(A) $8\frac{1}{8}$ (B) $8\frac{3}{8}$ (C) $8\frac{5}{8}$ (D) $8\frac{7}{8}$

23. 有 10 個不同的正整數其總和是 55，從中取出三個數後，餘下來的正整數總和是 35。請問取出的三個數的乘積最小值會是多少？

(A) 80 (B) 90 (C) 120 (D) 140

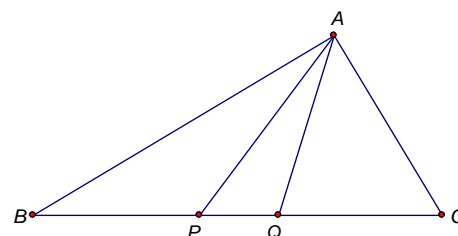
24. 已知 a 、 b 、 c 、 d 皆為正整數，其中只有一個是偶數，其餘是奇數，且其中任兩數相加，得到的和分別是 110、119、98、87、75、66，請問唯一的那個偶數是多少？

(A) 42 (B) 44 (C) 46 (D) 48

25. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{AC} = 8$ ， P 點和 Q 點在 \overline{BC} 上，

使得 $\overline{BP} = \overline{QC}$ 且 \overline{AQ} 是 $\angle BAC$ 的角平分線，試求 $|\overline{AP}^2 - \overline{AQ}^2|$ 之值。

(A) 8 (B) 12 (C) 16 (D) 無法求出



26. 已知 a, b, c, d 分別表示 0 至 9 中的四個不同數字，如果兩個二位數 $10a + d$ 與 $10b + d$ 的乘積恰好是一個三位數 $100c + 10c + c$ ，則 $a + b + c + d$ 之值為多少？

(A) 21 (B) 23 (C) 25 (D) 27

27. 已知邊長為 1 的正方形 $ABCD$ 中， P 為內部一點，使得 $\angle APB = 75^\circ$ ，則 $\triangle ABP$ 與 $\triangle CDP$ 面積之和為多少？

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

28. 已知 A 、 B 、 C 、 D 為平面上四點且滿足 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = \overline{CD} = 10$ ，且 $\overline{AD} = 17$ ，則 $\angle ADB$ 之度數的度數為多少度？

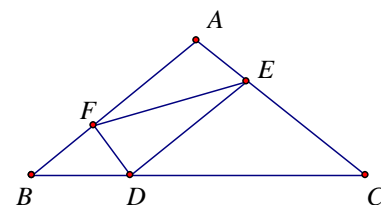
(A) 30 (B) 45 (C) 60 (D) 75

29. 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 、 F 三點分別在 \overline{BC} 、 \overline{CA} 、 \overline{AB} 三邊上

使得 $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ，又 $\triangle BDF$ 之面積為 9， $\triangle AEF$ 之面積為 15，

$\triangle CDE$ 之面積為 32，則 $\triangle DEF$ 與 $\triangle ABC$ 面積之比值為下列何者？

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{2}{9}$



30. 三角形 ABC 中， D, E, F 分別為邊 \overline{BC} ， \overline{AC} 及 \overline{AB} 上的點，

使得 \overline{AD} ， \overline{BE} ，及 \overline{CF} 交於一點 P ，且將三角形 ABC 分割成 6 個小三角形，其中四個三角形 $\triangle CDP$ ， $\triangle BDP$ ， $\triangle BFP$ ， $\triangle AEP$ 的面積分別為 30，40，56 及 70，

如圖所示，則三角形 ABC 的面積為多少？

(A) 275 (B) 285 (C) 300 (D) 315

