台北市立陽明高級中學 104 學年度教師甄選高中數學科筆試試題

一、 填充題：70% (共 10 題，每題 7 分)

1. 已知等比數列$\{a_n\}$的每一項均為實數，前 n 項和為S_n，若 $S_{10}=10$，$S_{30}=70$，求$S_{40}=$ __________ 。

2. 設ΔABC的內角 A、B、C 所對應的邊長分別為 a、b、c，且知 $a\cos B-b\cos A=\frac{3}{5}c$，則$\tan A\cot B=$ __________ 。

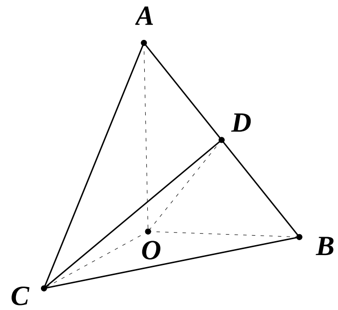
3. 設$\omega=\cos\frac{2\pi}{10}+i\sin\frac{2\pi}{10}$，則以$\omega, \omega^3, \omega^7, \omega^9$為根的方程式為__________ 。

4. 如右圖，已知ΔAOB中$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$，$\angle BAO=\frac{\pi}{6}$，$\overline{AB}=4$，

   D是線段$\overline{AB}$的中點，若ΔAOC是ΔAOB繞直線$\overleftrightarrow{AO}$旋轉而

   成的，若平面AOB與COD所夾的二面角為$\frac{\pi}{3}$，平面AOB與

   AOC所夾的二面角為θ，則$\sin\theta=$ __________ 。



5. 已知銳角ΔABC的外心為 O，$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=10$，若 $\overrightarrow{AO}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}$，且$2x+10y=5$，求$\cos(\angle \mathrm{BAC})=$ __________ 。

6. 已知曲線$\Gamma: y=x^2+a$ 到直線$L: y=x+2$ 的距離等於圓$C: x^2+(y+2)^2=2$ 到直線 $L: y=x+2$ 的距離，則實數 $a=$ __________ 。

7. 已知圓$x^2+y^2=10$與拋物線$x^2=4y$交於 A、B 兩點，F 為拋物線的焦點，若過 F 且斜率為 1 的直線 L 與拋物線和圓交於四個不同的點，由左至右依次為 P_1、P_2、P_3、P_4，求

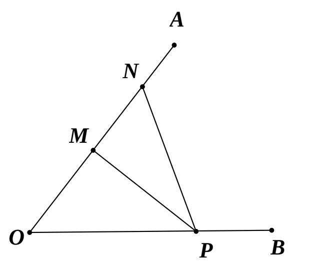
   $\overline{P_1P_2}+\overline{P_3P_4}$ = __________ 。

8. 已知實數 a>0，$a\neq 1$，正實數 x，y 滿足$(\log_a x)^2+(\log_a y)^2-\log_a(xy)^2\le 2$且$\log_a y\ge 1$。

   令 $k=\log_a x^2y$，則 k 的範圍為__________ 。

9. 有 4 對夫婦圍坐一圓桌，『**恰有兩對**』夫婦相鄰的坐法有__________種。

10. 如右圖，M、N 是銳角$\angle AOB$的一邊$\overline{OA}$上的兩點，且$\overline{OM}=5$，$\overline{MN}=3$，若點 P 是在$\overline{OB}$邊上使得$\angle MPN$最大，求$\overline{OP}=$ __________ 。



二、 計算證明題：30%

1. 已知 a、b、c 為實數，且$a+b+c=0$，$abc=5$，證明：a、b、c三數中必有一數大於$\frac{5}{2}$。(8%)

2. 設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 為一個**整係數** n 次多項式，
若整係數一次式 $\boldsymbol{ax-b}$ 是 $\boldsymbol{f(x)}$ 的**因式**，且 $\boldsymbol{a,b}$**互質**，證明 $\boldsymbol{a \mid a_n}$ **且** $\boldsymbol{b \mid a_0}$。(10%)

3. 已知$-2 \le a \le 2$，若函數 $f(x) = x^3 - 3x$，試就a 討論方程式 $f(f(x)) = a$ 的根的個數。(12%)