

廣義科西不等式題型

例題：設 $a, b \in R$ ， θ 為銳角，試求 $\frac{a}{\sin \theta} + \frac{b}{\cos \theta}$ 的最小值？

$Ans : \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$\begin{aligned} Sol : & \because (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \left(\frac{a}{\sin \theta} + \frac{b}{\cos \theta} \right) \left(\frac{a}{\sin \theta} + \frac{b}{\cos \theta} \right) \\ & \geq \left[\left(\sin^{\frac{2}{3}} \theta \right)^3 + \left(\cos^{\frac{2}{3}} \theta \right)^3 \right] \left[\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sin^{\frac{1}{3}} \theta} \right)^3 + \left(\frac{b^{\frac{1}{3}}}{\cos^{\frac{1}{3}} \theta} \right)^3 \right] \left[\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sin^{\frac{1}{3}} \theta} \right)^3 + \left(\frac{b^{\frac{1}{3}}}{\cos^{\frac{1}{3}} \theta} \right)^3 \right] \\ & \geq \left[\left(\sin^{\frac{2}{3}} \theta \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sin^{\frac{1}{3}} \theta} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sin^{\frac{1}{3}} \theta} \right) + \left(\cos^{\frac{2}{3}} \theta \cdot \frac{b^{\frac{1}{3}}}{\cos^{\frac{1}{3}} \theta} \cdot \frac{b^{\frac{1}{3}}}{\cos^{\frac{1}{3}} \theta} \right) \right]^3 = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^3 \end{aligned}$$

類 1：設 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，試求 $\frac{3}{\cos \theta} + \frac{2}{\sin \theta}$ 的最小值？(72 大學聯考)

$Ans : \left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9}\right)^{\frac{3}{2}}$

類 2：若 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，求 $y = \frac{27}{\sin \theta} + \frac{64}{\cos \theta}$ 的最小值？(大陸試題)(94 永仁高中)

$Ans : 125$

類 3：設 θ 為一銳角，滿足 $\frac{16}{\sin^6 \theta} + \frac{81}{\cos^6 \theta} = 625$ ，則 $\tan \theta = ?$

$Ans : \frac{\sqrt{6}}{3}$

(2005TRML)(99 彰化藝術高中)

類 4：若 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ，求 $\frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \frac{32}{\sqrt{\cos x}}$ 的最小值？(96 台南女中)

$Ans : 17^5$

類 5：已知 $x, y \in R$ ，且 $x + y = 1$ ，求 $\frac{1}{x^2} + \frac{8}{y^2}$ 的最小值？(大陸試題)

$Ans : 27$

類 6：若 a, b, c 為正數，且 $a^2 + b^2 + c^2 = 28$ ，求 $\frac{1}{a} + \frac{8}{b} + \frac{27}{c}$ 的最小值？

(99 竹南高中) $Ans : 7\sqrt{2}$

進階題：

類 1：已知 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ， $a, b > 0$ ，過 $P(3\sqrt{3}, 1)$ ，求 $a+b$ 之最小值？此時 Γ 方程式為何？

(大陸競賽)(95 台中一中)(101 P244#3) $Ans: \min = 8$ ， $\Gamma: \Gamma: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$

類 2：過定點 $P(1, 2)$ 的直線在 x 軸與 y 軸正半軸上的截距為 a 、 b ，則 $4a^2 + b^2$ 的最小值？

(大陸試題) $Ans: 32$

類 3：直線 L 過點 $P(16, 1)$ 且與 x 軸正向、 y 軸正向分別交於 A 、 B 兩點， O 為原點，試求

$\overline{OA}^3 + \overline{OB}^3$ 的最小值？(97 台中女中) $Ans: 9^4$

類 4：若 p 為 $4x^2 + 9y^2 = 36$ 上的動點，若 p 在第一象限移動，過 p 點之切線交 x 軸於 A 點、

交 y 軸於 B 點， O 為原點，求 $\overline{OA} + \overline{OB}$ 的最小值？(99 彰化藝術高中) $Ans: \left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9}\right)^{\frac{3}{2}}$

類 5：若 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ，求 $y = 9\tan^2 x + 4\cot^2 x + 12\tan x + 12\cot x$ 的最小值？ $Ans: \left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9}\right)^3 - 13$