嘉義縣 93 學年度國民中學教師甄選【數學科】試題

答題說明：請在彌封的答案紙上作答並標明題號。

＊填充題：每題 5 分，共 20 題，計 100 分。

1. $\dfrac{3-x}{(x-1)(x+1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$，則 A + B + C = ________。

2. 某人開車以每小時 50 公里的速率由甲地到乙地，再以每小時 30 公里的速率由乙地回到甲地，那麼某人由甲地到乙地再回到甲地的平均速率為 ______。

3. 設 m 是實數，而二次方程式 $(m+4)x^2-(m+1)x+1=0$ 沒有實數根，則 m 的範圍是 ____________。

4. 坐標平面上，$A(1,-5)$ 與 $B(-2,4)$，點 P 是直線 $y=x$ 上的動點，則 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值是 ______________。

5. 不等方程組 $\begin{cases}2x+1\le 2\\ 3x-5\ge a\end{cases}$ 的解是 $-1\le x\le\dfrac{1}{2}$ 則 $a=$ ____________。

6. 因式分解 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=$ ____________。

7. 相對於直線 $2x-y+1=0$，點 $A(2,2)$ 的對稱點座標為 ____________。

8. 連擲同一骰子三次，點數和超過 15 的機率是 ____________。

9. 五個字母 A, B, C, D, E 橫排成一列，其中 A, B 不相鄰的機率是 ____________。

10. 不管當 k 是什麼實數的時候, 下列直線 $(3k+1)x+(4k-3)y+6k+2=0$ 都會通過同一個定點，這個點的座標是 ____________。

11. 在 $(3x+\dfrac{1}{x^2})^7$ 的展開式中 $\dfrac{1}{x^2}$ 的係數是 ____________。

12. 解聯立方程式 $\begin{cases}4x-3y+z=-8\\ -2x+y-3z=-4\\ x-y+2z=3\end{cases}$. ____________。

13. 解方程式 $(x-1)^{\log(x-1)}=100(x-1)$ ____________。

14. 二元二次方程式 $9x^2-4y^2-54x+16y+k=0$ 的圖形是兩直線，這些直線的斜率是 ____________。

15. $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)^{62}=$ ________________。

16. 設 $A=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$, X 為一方陣且滿足 $AX=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 6 & -2\end{bmatrix}$，則 X =____________。

17. 求定積分 $\displaystyle\int_3^{2\sqrt{3}+1}\frac{dx}{x^2-2x+5}=$ ____________。

18. 曲線 $y=x^2$ 及直線 $y=2x$ 在第一象限內會圍出一區域，將此區域對 y 軸旋轉會產生一個實心體．這個實心體的體積為 ____________。

19. 設 $f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}kx^k$，$-1<x<1$，則 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=$ _______。

20. 曲面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z^2=6$ 在點 $P(-2,3,2)$ 的切面方程式為 _____________。

1. [高一]分別令$\begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3=-A+B+C \\ \frac{1}{9}=A+\frac{B}{3}+\frac{C}{9} \\ \frac{5}{-3}=\frac{A}{-3}+\frac{B}{-1}+\frac{C}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=-2 \end{cases}$
2. [國小]一樣令甲乙間距離為(50,30)=150，所以來回共 300 公里，時間 8 小時。
3. [國二]陷阱是 m≠－4，沒有實數根，表判別式小於 0。$(m+1)^2-4(m+4)<0 \Rightarrow -3<m<5$
4. [國二]AB 兩點，在 y=x 的異側，所以兩點之間最短距離就是所求。
5. [國一]3x-5≧a，是滿足-1≦x 的解，丟進去解出 a=－8
6. [國二]循環對稱式，先找出(a-b)是因式，依序可得(a-b)(b-c)(c-a)
7. [高三或高一，也可以用國中方法解]我比較喜歡用斜率的概念去解，

   對稱點 A’與 A 的直線方程為 x+2y=6。算出與 y=2x+1 的交點為$(\frac{4}{5},\frac{13}{5})$，再推出 A’$(-\frac{2}{5},\frac{16}{5})$。
8. [國三]16,17,18 點的機率相加為$\frac{6+3+1}{6^3}=\frac{10}{216}=\frac{5}{108}$
9. [高二]先排好 CDE，剩四個空隙，再 P(4,2)。所以$\frac{3!\times4\times3}{5!}=\frac{72}{120}=\frac{3}{5}$
10. [高一]直線族的概念，分成兩條直線來看，$\begin{cases} x-3y+2=0 \\ k(3x+4y+6)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$
11. [高二]3x 需 4 次。所以$C^7_4\times3^4\times1^3=2835$
12. [高二或國一]反正就硬算吧。(x,y,z)=(-2,1,3)
13. [高一]陷阱就是 x>1,x≠2。技巧，兩邊取對數，令 log(x-1)=t，原式變成$t^2=2+t$，

    解出$t=2,-1$，所以$x=\frac{11}{10},101$，解答好像只給 101 而已，原因不明。
14. [高二]這兩條線就是某雙曲線的漸進線。$y=\pm\frac{3}{2}x+blahblah$，斜率就$\pm\frac{3}{2}$
15. [高二]先找出主幅角，再用棣美弗。$(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi)^{62}=\cos\frac{217}{3}\pi+i\sin\frac{217}{3}\pi$

    $=\cos\frac{1}{3}\pi+i\sin\frac{1}{3}\pi=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$
16. [高三或線代] $X=A^{-1}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 6 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 6 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & -2\\ 32 & -6\end{bmatrix}$
17. [微積分－變數變換]令$x-1=2\tan\theta, dx=2\sec^2\theta d\theta$，上下界改為$(\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{3}\pi)$

    原式＝$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2\sec^2\theta d\theta}{4\sec^2\theta}=\frac{1}{2}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{24}$，答案也給錯了
18. [微積分－旋轉體]方法有兩種，我個人喜歡不會出現根號的那一種。

    $V=2\pi\int_0^2 x(2x-x^2)dx=2\pi(x^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^2=\frac{8}{3}\pi$，答案還是給錯，不曉得。

19. [微積分－無窮級數和]乍看之下很難，其實還好，相當於高一題目 $f(x)=\frac{1}{2}+2\cdot(\frac{1}{2})^2+3\cdot(\frac{1}{2})^3+\ldots$，

先算出首項為 $\frac{1}{2}$ 的等比級數和為 $\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$，之後每個級數和又形成，首項為 1，公比仍為 $\frac{1}{2}$ 的等比級數。

故級數和為 2。

20. [微積分－多變數函數微分應用]先偏微分，再將切點座標代進去成為法向量。

$(\frac{x}{2},\frac{2y}{9},2z)\Big|_{(-2,3,2)}=(-1,\frac{2}{3},4)$，平面方程為 $(-1)(x+2)+\frac{2}{3}(x-3)+4(z-2)=0$