

1. [高一級數和]換個角度看，有 2003 個 2，2002 個 20，2001 個 200，2000 個 2000，1999 個 20000，所以末五位會是  
 $4006+40040+400200+4000000+39980000$  組合出來的，也就是 24246。
2. [微積分－極限]直接做， $3a+1=8a+4, a=-\frac{3}{5}$
3. [高一－多項式求餘數]將  $x=1$  代入就得到 2
4. [高一－數論]設其他五位數為  $q$ ，按題意， $100000p+q=4(10q+p)$   
 $99996p=39q, q=2564p$ ，所以 102564,205128 有兩組解
5. [微積分－分部積分與瑕積分] $\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$
6. [不等式]令最小角為  $x$ ，最大角為  $x+24$ ，  
 就用最不幸的狀況，有兩個  $x$  或是兩個  $x+24$ 。  
 $3x+24=180, x=52$ ； $3x+48=180, x=44$ ，所以最小角範圍  $44 < x < 52$   
 最大角範圍介於  $68 < x+24 < 76$   
 故  $180-n$  為最小角時  $44 < 180-n < 52, 128 < n < 136$   
 $180-n$  為最大角時  $68 < 180-n < 76, 104 < n < 112$   
 故取上限與下限  $104 < n < 136$
7. [國三]平均數  $\frac{2x+2y+1}{4}$ ，中位數  $\frac{x+y}{2}$ ，相差  $\frac{1}{4}$
8. [高中的皮國一的骨] $25! = 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$   
 弄掉六個零之後還剩  $2^{16} \cdot 3^{10} \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$   
 個位數分別為 6,9,3,1,3,7,9,3 此時相乘為 4，故 26 乘進來也是 4，27 乘進來  
 變成 8 就是題目要問的。所以 27！。
9. [高一] $(a,b)=7, (a^2,b^2)=49$ ， $1274=49 \cdot 26 = a^2 + b^2$ ，26 只能化成  $25+1$   
 所以  $a=35, b=7, a-b=28$ ，其實這題很送分， $(a,b)=7$ ，答案就只剩 28 了
10. [二次曲線]設  $P(x,y)$ 按題意  $2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x-4|$ ，展開後  
 $4x^2 - 8x + 4 + y^2 = x^2 - 8x + 16$ ， $3x^2 + y^2 = 12$  所以是橢圓
11. [反函數]我就找幾個點，來回代來代去檢查，就得到(C)了
12. [我用一元硬幹]假設三人合作需  $x$  小時，則每人獨作需時

$$\begin{cases} \text{甲} : x+6 \\ \text{乙} : x+1 \Rightarrow \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{x} \Rightarrow 4x^2 + 14x = x^2 + 7x + 6 \\ \text{丙} : 2x \end{cases}$$

$$3x^2 + 7x - 6 = (3x-2)(x+3) = 0, x = \frac{2}{3}, -3(\text{不合})，其實從列式就知道甲乙合作$$

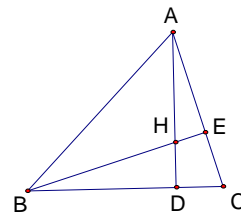
$$\text{等於丙獨作，所以就是 } 2x = \frac{4}{3}$$

13. [國二]  $\sqrt{2009} = 7\sqrt{41} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ，又  $x < y$  所以只有三組解(1,6)(2,5)(3,4)

14. [國二]按題意畫圖如左，可得  $\angle CAD = \angle HBD$

$\overline{BH} = \overline{AC}$ ，又有  $\angle CDA = \angle HDB = 90^\circ$  所以可證得

$\triangle CAD \cong \triangle HBD$ ，因此  $\overline{AD} = \overline{BD}$ ，故  $\angle ABC = 45^\circ$



15. [國一]老梗題，反正就是在找 1-100 間完全平方數的個數，所以有十個。

16. [高二的程式國一的知識]在找格子點。用表格比較快。共 14 個

x	1	2	3	4	5	6
y	1~6	1~3	1~2	1	1	1

17. [高一三角函數]這可以慢慢導，但我用背的。這種形式都會是  $\frac{1}{2}$ 。

18. [高一函數]令  $f(x) = a(x-1)(x+2)(x-b) + 3$

$$f(0) = 2ab + 3 = 5, ab = 1$$

$$f(2) = a \cdot 1 \cdot 4 \cdot (2-b) + 3 = 8a - 4ab + 3 = 15, a = 2, b = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = (x-1)(x+2)(2x-1) + 3, f(3) = 2 \times 5 \times 5 + 3 = 53$$

19. [高一函數]  $(x^2 - 2x - 3) = (x-3)(x+1) = \frac{(x-3)}{1999} \times (1999x + 1999)$ ，所以餘式為 0

20. [國一]  $2^{1001} - 2 \equiv 0 \pmod{10}$ ，所以(B)52，要用費馬小定理，我也不反對

21. [國二根與係數]按題意得  $\begin{cases} m+n=-m \\ mn=n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-2 \end{cases}$  較大者 1

22. [國一還是益智題?]我覺得題目怪怪的，答案給 0 組，但是我有找到 (2,3,5,41,67,89)，所以我也不知道。

23. [國三]底邊跟兩中線會圍出一個等腰直角三角形，這面積為原本的  $\frac{1}{3}$

而等腰直角三角形面積為 9，故原本面積為 27

24. [奇技淫巧]首先要知道  $ab=1$ ，令  $\frac{a}{b} = a^2 = k$

$$\frac{1999a}{1999b} = \frac{-8-5a^2}{-5-8b^2} \Rightarrow k = \frac{8+5b^2k^2}{5+8b^2} \Rightarrow (b^2k-1)(5k-8)=0 \Rightarrow k = \frac{8}{5}$$

25. [鴿籠原理]符合題意中，最誇張的狀況就是 99 個人都是 9 塊錢，剩下那個就是 109 元。