國立臺中文華高級中學 100 學年度第二次教師甄選
數學科試題本

測驗說明:
1．本試題包含填充題與計算題兩部分。填充題請依序將答案填入答案欄內，不需寫出運算過程，計算題需詳列計算過程。
2．提供計算紙一張，考試結束需連同試題本、答案卷一併繳回。

一、填充題 (第 1 至 6 題每題 5 分，第 7 至 16 題每題 6 分，共 90 分)

1. 若數列 $a_1=1, a_2=1, a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$，$\forall n\in \mathbb{N}$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ ＝____________。

2. 在$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=7$，設其外心為O，垂心為H，則$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ____________。

3. $\cos\alpha-\cos\beta=\dfrac{1}{3}$，$\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{2}$，求 $\sin(\alpha-\beta)=$____________。

4. 設 $A(4,3,2)$，$B(2,1,4)$，點 P 在平面 E：$x-2y-2z=-1$ 上移動，則$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$的最小值為____________。

5. 由 1，2，3，…，20 挑出x_1，x_2，x_3三個數字，且 $x_1<x_2<x_3$，求 x_1與x_2至少差3，x_2與x_3至少差 5 的機率為____________。

6. 試求 30! 的正因數個數____________。

7. 平面上有一橢圓，已知其焦點為$(2\sqrt{5},0)$和$(-2\sqrt{5},0)$，且 $x+2y=5$為此橢圓的切線，求此橢圓方程式為____________。

8. 設 $f(x)=ax^2+bx+c$，$(a,b,c\in R, a\neq 0, x\in R)$，已知 $-1\le f(1)\le 2, 2\le f(2)\le 4, -3\le f(3)\le 4$，令 $f(4)$的最大值為 M, 最小值為 m, 則 2M+m＝____________。

9. 集合 S ＝｛1、2、3、4、5、6、7、8、9｝，從 S 中取出四個不同的數字做成一個四位數，此四位數為 99 的倍數共有_________個。

10. 若 $f(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\frac{t^2}{1+t^2+t^4}dt$ ，試求 $f''(1)=$____________。

11. $\lim_{x\to 4}\frac{\int_4^x \frac{1}{t+\sqrt{t}}dt}{x-4}=$____________。

12. 試求 $C_0^{21}+\frac{1}{2}C_1^{21}+\frac{1}{3}C_2^{21}+\frac{1}{4}C_3^{21}+\cdots+\frac{1}{22}C_{21}^{21}=$____________。

13. 甲乙丙丁 4 位同學代表班上參加爲期 2 日的運動會，比賽項目有「100 公尺短跑」「跳遠」「跳高」「趣味競賽」「馬拉松」，每位同學每日參加一項目的比賽，且 2 日參賽項目都不相同，若第 1 日不舉辦「趣味競賽」，第 2 日不舉辦「100 公尺短跑」，其他項比賽每日皆舉辦 1 次且皆派 1 人代表參加，則有____________種參賽方法。

14. 從正立方體的 8 個頂點中選取 3 個作三角形,試問選到直角三角形的機率＝__________。

15. 求函數 $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1},\ x\in\mathbb{R}$ 的值域____________。

16. 試求$(1+x^2)+2(1+x^2)^2+3(1+x^2)^3+\ \cdots\ +15(1+x^2)^{15}$展開式中，$x^4$ 項的係數__________。

二、計算題 (10 分，請詳列計算過程)

1. 過點 $P(1\ ,2)$作一直線 L 與拋物線 $y=\frac{1}{5}x^2$ 交於 A、B 兩點，O 表原點，若$\angle AOB$ 爲直角，求直線 L 的方程式____________。