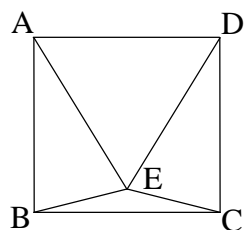


# 臺北市九十二學年度國中教師聯合甄選數學專業科目試題

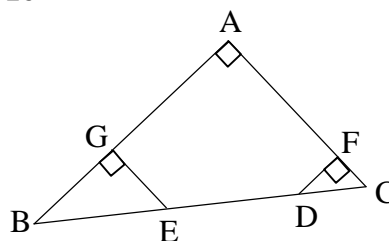
選擇題（共 40 題，每題 1.5 分，計 60 分）

**注意：**下列各題中的圖僅供參考，並非按照精確比例作圖。

1. 如圖一所示，四邊形 ABCD 是一個正方形， $\triangle AED$  是一個正三角形，那麼  $\angle ECB$  的大小是多少度？  
 (A)  $10^\circ$       (B)  $15^\circ$       (C)  $20^\circ$       (D)  $25^\circ$



圖一

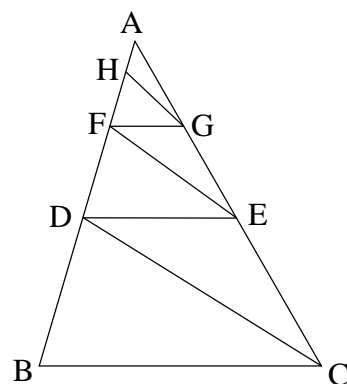


圖二

2. 如圖二所示， $\triangle ABC$ 、 $\triangle BEG$ 、 $\triangle DCF$  都是直角三角形， $\angle BAC$ 、 $\angle BGE$ 、 $\angle DFC$  都是直角， $\overline{AB} = \overline{DB}$ ， $\overline{AC} = \overline{EC}$ 。

若  $\overline{AC} = 6$ ， $\overline{AB} = 8$ ，求  $\overline{DF}$  的長。

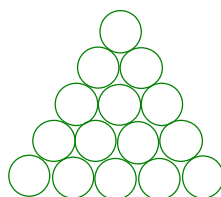
- (A) 3.2      (B) 2.8      (C) 2.4      (D) 1.6
3.  $\overline{BE}$  是  $\triangle ABC$  的一條中線，O 是  $\overline{BE}$  的中點。連接 A、O 交  $\overline{BC}$  於 D 點，連接 C、O 交  $\overline{AB}$  於 F 點。已知  $\overline{CO} = 15$ ， $\overline{OF} = 5$ ， $\overline{AO} = 12$ ，求  $\overline{OD}$  的長。
- (A) 2      (B) 3      (C) 4      (D) 5
4. 如圖三所示，在  $\triangle ABC$  中， $\overline{FG} \parallel \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{HG} \parallel \overline{FE} \parallel \overline{DC}$ 。



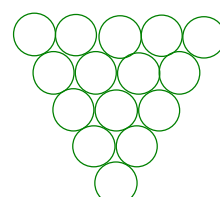
圖三

已知  $\overline{AH} = 2$ ， $\overline{HF} = 4$ ，求  $\overline{BD}$  的長。

- (A) 6      (B) 18      (C) 24      (D) 36
5. 有 15 個五元硬幣排成圖四 a 的形式，若要將它們以平移的方式移動，使的它們變成圖四 b 的形式，請問最少要移動幾個五元硬幣？
- (A) 3 個      (B) 4 個      (C) 5 個      (D) 9 個
6. 若一個自然數的每個位置都是偶數數字，我們就稱它為「偶樣子」的數。請問具有「偶樣子」的四位數有幾個呢？



圖四 a



圖四 b

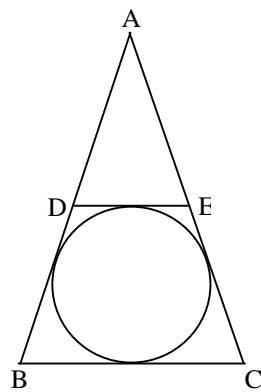
- (A) 8500 個      (B) 8375 個      (C) 625 個      (D) 500 個
7. 正整數  $(2002 \times 2003 \times 2004 + 2005^3)$  被 7 除，所得的餘數是多少？  
 (A) 6      (B) 5      (C) 4      (D) 3
8. 兩個正整數  $2^{120} - 1$  與  $2^{100} - 1$  的最大公因數是多少？  
 (A)  $2^{60} - 1$       (B)  $2^{50} - 1$       (C)  $2^{20} - 1$       (D)  $2^{10} - 1$
9. 如果抽屜內有 14 雙同型式的襪子，其中 7 雙是黑色，4 雙是藍色，3 雙是灰色。那麼在黑暗中，要保證一定會最少拿到一雙同色的襪子，請問從抽屜內至少同時要取出幾隻襪子？  
 (A) 4 隻      (B) 5 隻      (C) 6 隻      (D) 7 隻

10. 一架飛機每次飛行都要往返各一趟，每趟的距離都是  $d$  公里。有一次飛行，去的時候速率是每小時 240 公里，回程時速率是每小時 360 公里。請問這次飛行的平均速率是每小時多少公里？
- (A) 270 (B)  $120\sqrt{6}$  (C) 288 (D) 300 公里/小時
11. 有一位生在十八世紀的人，當西元  $x^2$  年時，他正好  $x$  歲。那麼當西元 1776 年時，他是幾歲呢？
- (A) 27 歲 (B) 36 歲 (C) 48 歲 (D) 54 歲
12. 設  $y_1 = \frac{x+1}{x-1}$ ,  $y_2 = \frac{y_1+1}{y_1-1}$ ,  $y_3 = \frac{y_2+1}{y_2-1}$ , ...,  $y_n = \frac{y_{n-1}+1}{y_{n-1}-1}$ 。那麼當  $x = 3$  時， $y_{100}$  的值是多少？
- (A) 2 (B) 3 (C) 100 (D) 300
13. 若方程式  $5(x-2) = \frac{27}{7}(x+2)$  中所有的數都是以 9 為底，則此方程式的解以 10 為底表示出來是多少？
- (A) 7 (B) 10 (C) 12 (D) 15.5
14. 當  $N, D$  都是自然數，且  $\frac{N}{D} < 1$  時，我們說  $\frac{N}{D}$  是一個真分數。現在定義  $f(D)$  為分母為  $D$  的最簡真分數的個數，例如  $f(6) = 2$ ，因為分母為 6 的真分數有  $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$ ，而其中只有  $\frac{1}{6}$  與  $\frac{5}{6}$  是最簡分數，所以  $f(6) = 2$ 。求  $f(51)$  的值。
- (A) 33 (B) 32 (C) 31 (D) 30
15. 設  $f(3n) = n + f(3n-3)$ ，其中  $n$  是大於 1 的正整數；而當  $n = 1$  時， $f(3n) = 1$ 。問  $f(27)$  的值是多少？
- (A) 45 (B) 48 (C) 51 (D) 55
16. 如果函數  $f(n) = n(n+1)$ ，其中  $n$  是正整數，請找出一個  $n$  的值，使得  $f(n+4) = 4f(n) + n$ 。
- (A)  $n = -2$  (B)  $n = \frac{10}{3}$  (C)  $n = 6$  (D) 無解
17. 假設小明與小華兩人打乒乓球技術一樣好，那麼兩個人進行比賽，下列哪一種狀況最可能發生？
- (A) 比賽 4 場小明贏 3 場 (B) 比賽 8 場小明贏 5 場  
(C) 比賽 10 場小明贏 6 場 (D) 比賽 12 場小明贏 7 場
18. 下列哪一個無限級數收斂？
- (A)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$  (C)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{3^n}$  (D)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
19. 有限交換群  $Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_5$  與下列哪一個群同構？
- (A)  $Z_2 \times Z_4 \times Z_3 \times Z_3 \times Z_5$  (B)  $Z_2 \times Z_4 \times Z_9 \times Z_5$   
(C)  $Z_2 \times Z_6 \times Z_{30}$  (D)  $Z_{360}$
20. 在直角坐標平面上有一個三角形，它的三個頂點坐標分別為  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(9, 1)$ 。現有一條垂直於  $x$  軸的直線，將此三角形分成兩個等面積的區域，則此直線的方程式為  $x = ?$
- (A) 2.5 (B) 3.0 (C) 3.5 (D) 4.0
21. 設  $4^a + 4^b + 4^c - 2^{a+b} - 2^{b+c} - 2^{c+a} = 0$ ，而  $a, b, c$  表示  $\triangle ABC$  的三邊長，則  $\triangle ABC$  是何種三角形？
- (A) 鈍角三角形 (B) 直角三角形  
(C) 正三角形 (D) 等腰直角三角形
22. 張小姐有四件 T 恤分別為白色、藍色、紅色、黑色，已知她每天要挑一件 T 恤來穿，但今天穿過，隔天就不再穿（意即不能連續穿 2 天），若這星期的星期一她穿白色 T 恤則這星期的星期五也穿白色 T 恤的機率為何？
- (A)  $\frac{7}{27}$  (B)  $\frac{13}{27}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{3}$

23. 如右上圖， $\triangle ABC$  為等腰三角形， $\overline{AB} = \overline{AC} = 13$ ， $\overline{BC} = 10$ ，圓  $O$  為其內切圓，作

$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$  且與圓  $O$  相切，求  $\triangle ADE$  之面積為何？

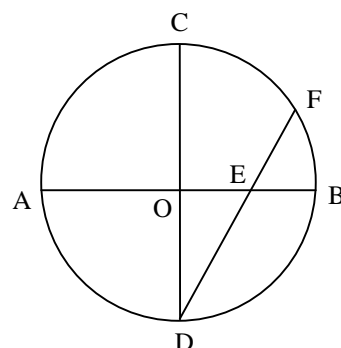
- (A)  $\frac{80}{3}$  (B) 15 (C)  $\frac{160}{9}$  (D)  $\frac{320}{27}$



24. 如右下圖， $\overline{AB}$  與  $\overline{CD}$  為圓  $O$  之兩直徑，且  $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ，弦  $\overline{DF}$  交  $\overline{AB}$  於  $E$ ，若

$\overline{DE} = 6$ ， $\overline{EF} = 2$ ，試問圓  $O$  面積為？

- (A)  $23\pi$  (B)  $\frac{47}{2}\pi$  (C)  $24\pi$  (D)  $\frac{49}{2}\pi$



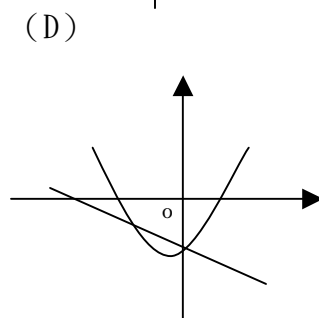
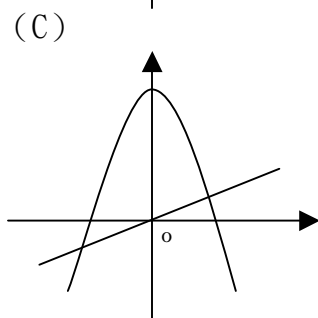
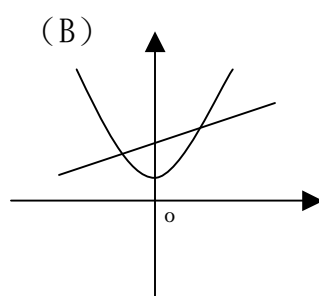
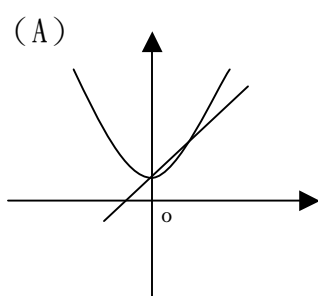
25. 下列哪一個數字可以整除  $2^{24} - 1$ ？

- (A) 251 (B) 253 (C) 255 (D) 257

26. 已知  $a\sqrt{-\frac{1}{a}} \in R$ ，則  $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$  等於下列何式？

- (A)  $\sqrt{-a}$  (B)  $\sqrt{a}$  (C)  $-\sqrt{-a}$  (D)  $-\sqrt{a}$

27. 下列 4 個圖中，直線的方程式  $y = ax + b$ ，拋物線的方程式  $y = ax^2 + b$ ，其中只有一個圖可能正確，這個可能正確的圖是？



28. 下列哪一個數一定不是某個自然數的平方(其中  $n$  為自然數)？

- (A)  $3n^2 - 3n + 3$  (B)  $4n^2 + 4n + 4$  (C)  $5n^2 - 5n - 5$  (D)  $7n^2 - 7n + 7$

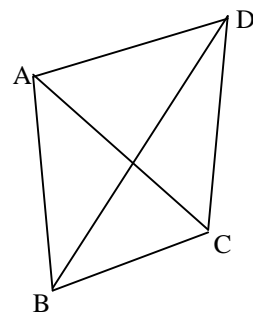
29. 請問 1 到 100 的自然數中，滿足比 4 的倍數多 1 且比 5 的倍數少 1 的所有數之和為多少？

- (A) 137 (B) 158 (C) 187 (D) 245

30. 如圖，四邊形  $ABCD$  中， $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD}$ ，如果  $\angle DAC$  是  $\angle CAB$  的  $k$  倍( $k > 0$ )，則

$\angle DBC$  是  $\angle BDC$  的

- (A)  $\frac{k}{2}$  倍 (B)  $k$  倍 (C)  $2k$  倍 (D)  $3k$  倍



31.  $x$ 、 $y$  為整數，且  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$ ，問  $(x, y)$  有多少組解？

- (A) 7 (B) 10 (C) 13 (D) 16。

32. 拋物線  $y = x^2 - 2x + 2$  與直線  $y = kx - 2$  相切，滿足前述條件的  $k$  值分別為  $k_1$  與  $k_2$ ，求  $k_1 + k_2 = ?$

- (A) 1 (B) 0 (C) -2 (D) -4。

33.  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB}=8$ ， $\overline{BC}=9$ ， $\overline{CA}=10$ ， $\triangle ABC$  的內切圓半徑為  $r$ ，下列各數哪一個和  $r$  最接近？

(A) 1      (B) 2      (C) 3      (D) 4。

34.  $y=f(x)=x^2-2$  與  $y=g(x)=-x^2+6$  兩個函數圖形所圍成的封閉區域面積為何？

(A)  $\frac{64}{3}$       (B)  $\frac{32}{3}$       (C)  $\frac{16}{3}$       (D)  $\frac{8}{3}$ 。

35.  $x$  與  $k$  皆為自然數，且  $\sqrt{x+128}-\sqrt{x-4}=k$ ， $k$  之最大值為何？

(A) 6      (B) 8      (C) 10      (D) 12。

36.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2+n}} \right) = ?$

(A) 1      (B)  $\frac{1}{2}$       (C)  $\frac{1}{4}$       (D)  $\frac{1}{8}$ 。

37. 設  $(1-x-x^2)^{93} = 1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{186}x^{186}$ ，求  $a_2$  之值？

(A) 4324      (B) 4231      (C) 4278      (D) 4185。

38. 由 0、1、1、2、2、2 六個數字中任取五個可以排成幾個不同的五位數？

(A) 40      (B) 50      (C) 60      (D) 70。

39. 設  $A$ 、 $B$  為橢圓  $9x^2 + 25y^2 + 18x - 100y - 116 = 0$  之二焦點，若  $C$  為橢圓上異於頂點的任意點，則  $\triangle ABC$  的周長為何？

(A) 14      (B) 16      (C) 18      (D) 20。

40. 平面上相異四點  $P$ 、 $A$ 、 $B$ 、 $C$ ，若  $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = \overline{AC}$ ，求  $\frac{\triangle ACP \text{ 面積}}{\triangle BCP \text{ 面積}} = ?$

(A)  $\frac{1}{2}$       (B)  $\frac{2}{3}$       (C)  $\frac{3}{4}$       (D)  $\frac{4}{5}$ 。